Geometría

© Dpto. Pedagógico ***TRILCE***
© Derechos de Edición
Asociación Educativa ***TRILCE***

Tercera Edición, 2007.

Todos los Derechos Reservados. Esta publicación no puede ser reproducida, ni en todo ni en parte, ni registrada en, o transmitida por, un sistema de recuperación de información, en ninguna forma y por ningún medio, sea mecánico, fotoquímico, electrónico, magnético, electroóptico, por fotocopia, o cualquier otro, sin el permiso previo de la editorial.

INTRODUCCIÓN

Las matemáticas, con sus grandiosas panorámicas, su apreciación de la belleza y su precepción de nuevas realidades, posee una propiedad adictiva que es menos evidente y saludable, afin en cierto modo a los efectos de algunas drogas. El más nimio problema, aun siendo inmediatamente reconocible como trivial o reiterativo, puede ejercer esta influencia adictiva. Una de las formas en que podemos vernos arrastrados es comenzar a resolverlos.

Martín Gardner

Las ciencias matemáticas se han desarrollado a través de los milenios y tienen definitivamente su origen en la necesidad de los seres humanos de especificar cantidades y medir figuras. El hecho que las matemáticas sean un medio para describir (y tal vez para resolver) los problemas del mundo real, descansa en la interacción entre lo concreto y lo abstracto. Es así como la enseñanza de las matemáticas, la manipulación de los números está dividida en lo concreto: Aritmética o cálculos con números, y lo abstracto: Álgebra o cálculo de símbolos. Ahora en la enseñanza de la Geometría se va más allá, involucrando sutilezas, como el distinguir entre la figura concreta, imaginar o crear otras figuras que ayuden a comprender y resolver las anteriores y a otras de formas más abstractas.

Sólo se llegará a desarrollar las destrezas geométricas con una constante práctica que, a su vez, nos dará una mayor visión y fascinación sobre lo que estamos tratando. Este es uno de los objetivos del texto.

A lo largo del desarrollo histórico de la Geometría, se observa la atracción que ella desencadenó en grandes matemáticos, aportando muchos de ellos, teoremas valiosos que, ordenados bajo una secuencia lógica y constructiva, hacen de la Geometría un curso razonado, elegante y fascinante.

Este texto está dirigido a un nivel secundario y pre-universitario. Primero mostramos un resumen de los contenidos teóricos (definiciones, teoremas, etc.). Luego, presentamos ejercicios y problemas propuestos que se encuentran estructurados en orden creciente al grado de dificultad. Para ello, hemos utilizado guías de clase, problemas de exámenes de admisión de las diferentes universidades del país, terminando con aportes de los profesores del curso y olimpiadas matemáticas.

Los profesores responsables de la elaboración estamos seguros que este texto será una herramienta valiosa para los objetivos del usuario; pero sobre todo deseamos despertar y desarrollar el gusto y la fascinación por la Geometría.

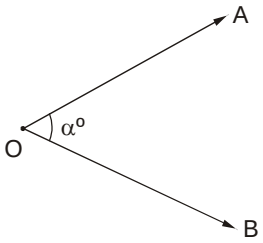
La Organización TRILCE agradece por anticipado todos los aportes que se hagan llegar a esta primera edición y agradece infinitamente a todas las personas que hicieron posible cristalizar este proyecto tan esperado por la familia TRILCE.

Capítulo

1 ÁNGULOS

Definición :

Es la figura geométrica determinada por la reunión de dos rayos no alineados que tienen el mismo origen.

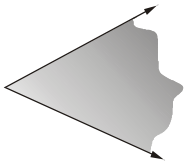


Elementos
1. Vértice : O
2. Lados : $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$

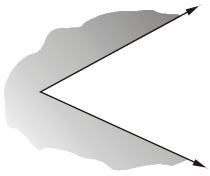
Notación : * Ángulo AOB : $\sphericalangle$ AOB, $A\hat{O}B$

* Medida del ángulo AOB : m$\sphericalangle$ AOB = $\alpha°$.

Región Interior de un ángulo

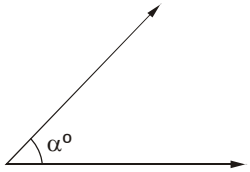


Región Exterior de un ángulo



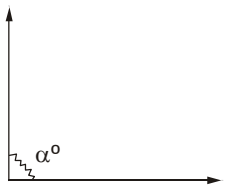
Clasificación de los Ángulos por su Medida :

**** Ángulo Agudo***



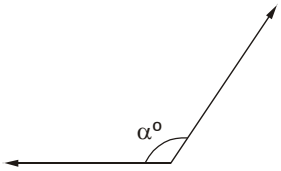
$0º < \alpha º < 90º$

**** Ángulo Recto***



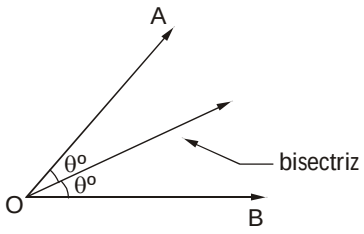
$\alpha º = 90º$

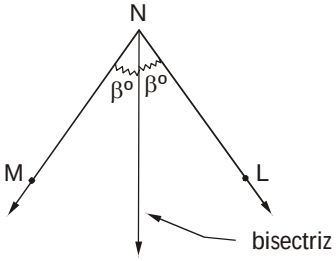
**** Ángulo Obtuso***



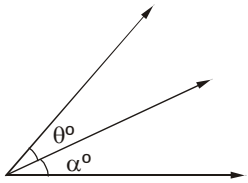
$90º < \alpha º < 180º$

Bisectriz de un ángulo :

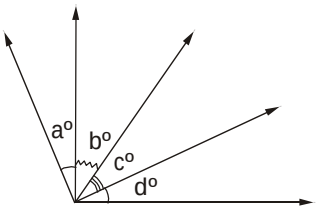




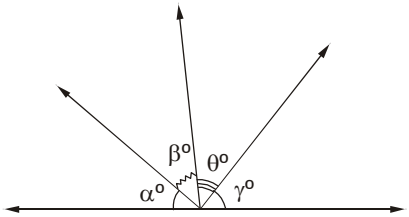
Ángulos Adyacentes :



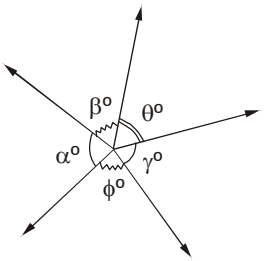
Ángulos Consecutivos :



Observaciones :

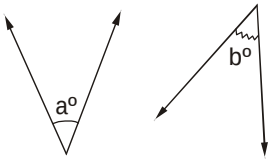


$\alpha^o+\beta^o+\theta^o+\gamma^o = 180^o$



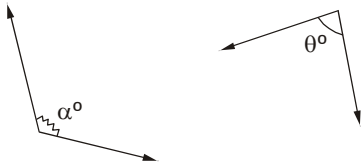
$\alpha^o+\beta^o+\theta^o+\gamma^o+\phi^o = 360^o$

Ángulos Complementarios



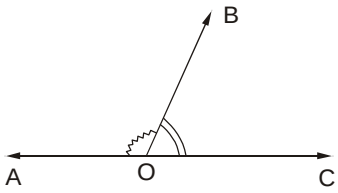
$a^o + b^o = 90^o$

Ángulos Suplementarios

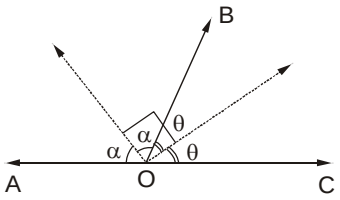


$\alpha^o + \theta^o = 180^o$

Ángulos Adyacentes Suplementarios :

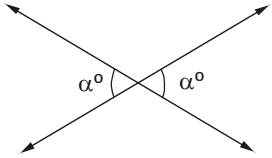


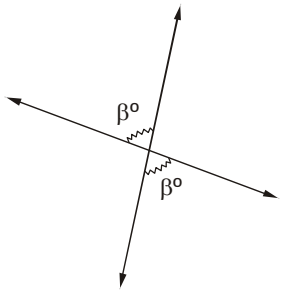
Los ángulos AOB y BOC también se les denomina par lineal.



Las bisectrices de todo par lineal son perpendiculares.

Ángulos Opuestos por el vértice

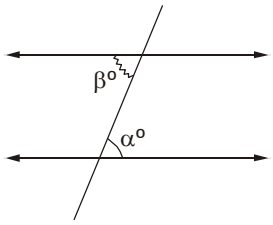




Observaciones :

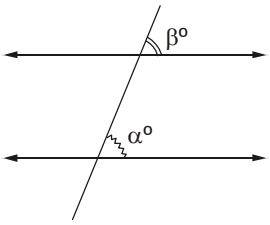
Es necesario recordar los siguientes ángulos comprendidos entre rectas paralelas.

**** Alternos Internos***



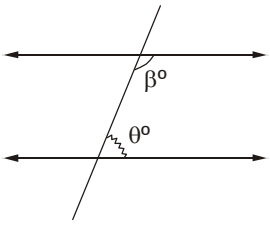
$\alpha^o = \beta^o$

**** Correspondientes***



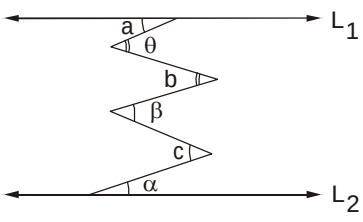
$\alpha^o = \beta^o$

**** Conjugados***



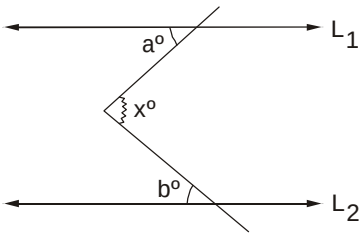
$\theta^o + \beta^o = 180^o$

**** Si :*** $\overleftrightarrow{L_1} \,//\, \overleftrightarrow{L_2}$



$\alpha^o+\beta^o+\theta^o+ = a^o+b^o+c^o$

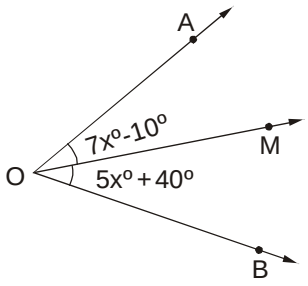
**** Si :*** $\overleftrightarrow{L_1} \,//\, \overleftrightarrow{L_2}$



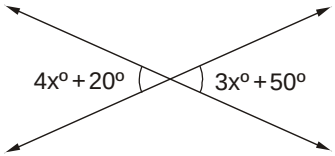
$x^o = a^o + b^o$

Test de aprendizaje preliminar

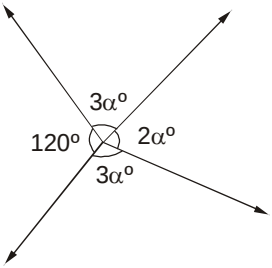
01. Si: $\overrightarrow{OM}$ es bisectriz del ángulo AOB, calcule "xº".



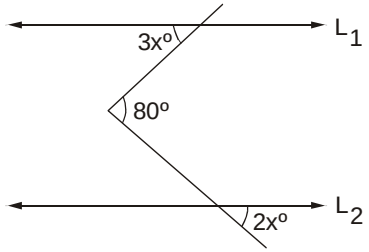
02. Calcule "xº".



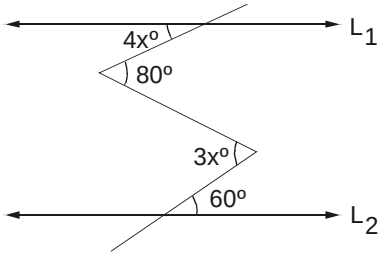
03. Calcule : $\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\circ}$.



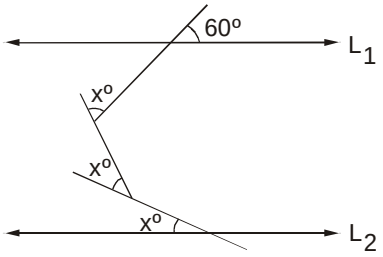
04. Calcule "xº", si : $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$.



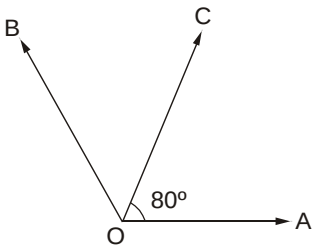
05. Si : $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, calcule "xº".



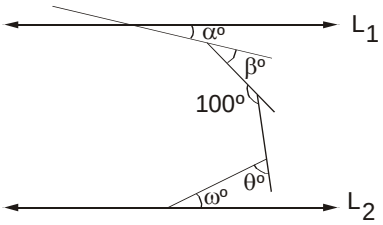
06. Si : $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, calcule "xº".



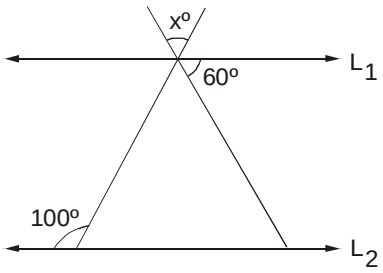
07. En el gráfico, las medidas de los ángulos AOB y BOC son suplementarios y la $m\sphericalangle AOC = 80°$.
Calcule la $m\sphericalangle AOB$.



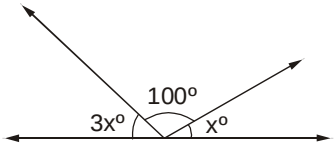
08. Si : $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, calcule : $\alpha^o+\beta^o+\theta^o+\omega^o$.



09. Si : $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, calcule "xº".



10. Calcule "xº".



Practiquemos :

11. Se tienen los ángulos AOB y BOC consecutivos y miden 20° y 30° respectivamente. Calcule la medida del ángulo que forman sus bisectrices.

12. El doble del complemento de la medida de un ángulo es 120°. ¿Cuánto mide el ángulo?

13. Si un ángulo es el doble de su suplemento, ¿Cuánto mide el ángulo?

14. La diferencia de la medida de dos ángulos consecutivos AOB y BOC es 80°. Calcule la $m\sphericalangle DOB$, si : $\overrightarrow{OD}$ es bisectriz del ángulo AOC.

15. ¿Cuánto mide el ángulo formado por las bisectrices de dos ángulos adyacentes y complementarios?

16. Si al complemento de un ángulo se le disminuye 10°, éste resulta ser el suplemento del triple del ángulo. Calcule el complemento de la mitad del ángulo.

17. Se tienen los ángulos consecutivos AOB, BOC y COD, tal que los ángulos AOC y AOB son complementarios; $m\sphericalangle AOD + m\sphericalangle AOB = 120°$.
Calcule la $m\sphericalangle DOC$.

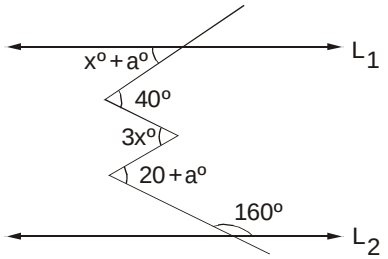
18. El doble de la medida un ángulo es mayor que otro en 30°. Si los ángulos son conjugados internos comprendidos entre rectas paralelas, ¿En cuánto se diferencian las medidas de estos ángulos?

19. Se tiene los ángulos consecutivos AOB; BOC y COD, tal que :
$m\sphericalangle AOD = 148°$ y $m\sphericalangle BOC = 36°$.
Calcule la medida del ángulo formado por las bisectrices de los ángulos AOB y COD.

20. Se trazan los rayos coplanares y consecutivos $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ y $\overrightarrow{OD}$, determinándose los ángulos consecutivos AOB, BOC, COD y DOA que miden 90°, $7\theta°$, $10\theta°$ y 100°.
Calcule el complemento de $\theta°$.

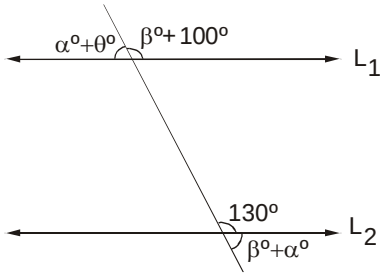
Problemas propuestos

21. Si : $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, calcule "x°".



a) 18° b) 16° c) 15°
d) 10° e) 25°

22. Si : $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, calcule $\theta°$.



a) 10° b) 15° c) 25°
d) 20° e) 30°

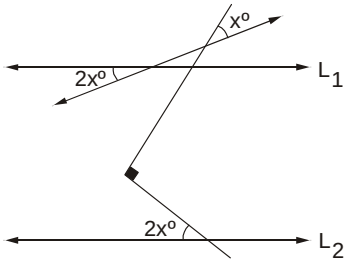
23. Si la sexta parte del suplemento del complemento de un ángulo es igual a 1/3 de 9° menos que su complemento, calcule la medida del ángulo.

a) 32° b) 16° c) 48°
d) 24° e) 30°

24. Un ángulo mide los 2/3 de un ángulo recto y otro ángulo los 4/5 de un ángulo recto, calcule el complemento de su diferencia.

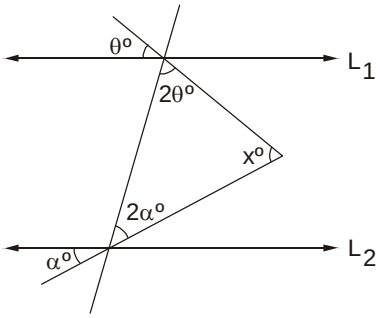
a) 30° b) 78° c) 18°
d) 48° e) 60°

25. Calcule : "xº", si : $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$.



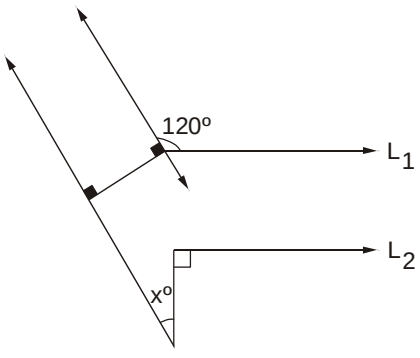
a) 80° b) 18° c) 70°
d) 20° e) 75°

26. Si : $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, calcule "xº".



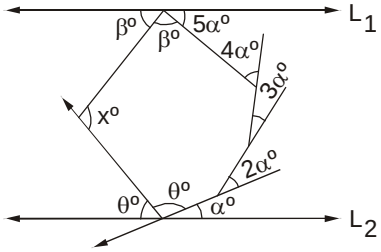
a) 90° b) 70° c) 60°
d) 40° e) 30°

27. Si : $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, calcule "xº".



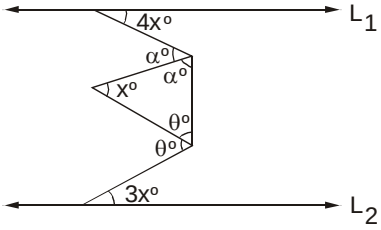
a) 10° b) 20° c) 25°
d) 30° e) 45°

28. Si : $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, calcule "xº".



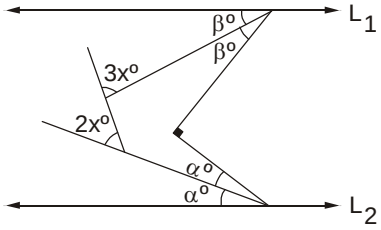
a) 154° b) 115° c) 130°
d) 144° e) 120°

29. En el gráfico, calcule "xº", siendo : $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$.



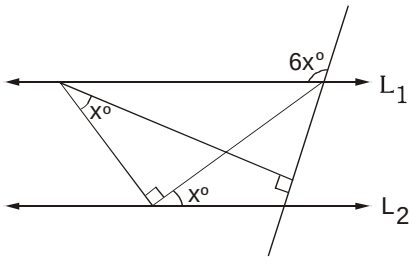
a) 35° b) 20° c) 30°
d) 45° e) 37°

30. Calcule "xº", si : $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$.



a) 18° b) 9° c) 27°
d) 30° e) 20°

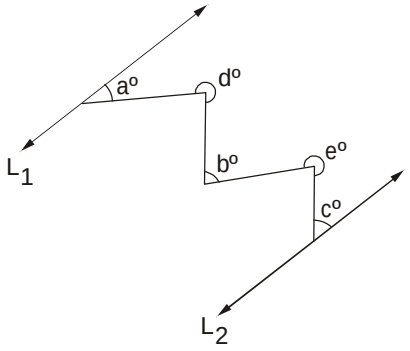
31. Si : $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, calcule "xº".



a) 15° b) 10° c) 12,5°
d) 22° e) 22°30'

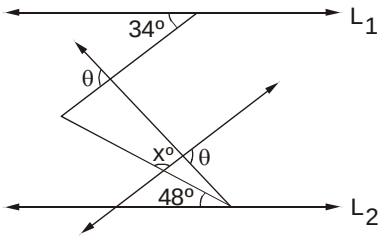
32. Si : $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, calcule :

$a° + b° + c° + d° + e°$.



a) 180° b) 520° c) 480°
d) 360° e) 720°

33. Si : $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, calcule "xº".



a) 34° b) 48° c) 82°
d) 98° e) 49°

34. El doble del complemento de un ángulo sumado con el suplemento de otro ángulo es igual al suplemento del primer ángulo. Calcule la suma de las medidas de dichos ángulos.

a) 100° b) 45° c) 90°
d) 180° e) 160º

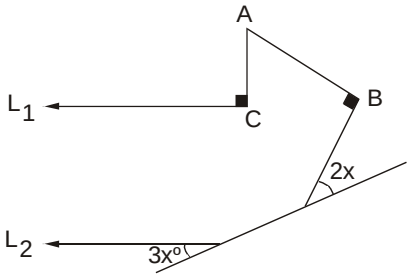
35. El doble del complemento de un ángulo aumentado en el triple del suplemento del doble de dicho ángulo nos da 480°. Calcule el suplemento de la medida de dicho ángulo.

a) 30° b) 60° c) 120°
d) 150° e) 135°

36. La diferencia de las medidas de dos ángulos es 40° y el triple del suplemento del ángulo doble del primero es igual al duplo del complemento del suplemento del ángulo triple del segundo. Calcule la medida de dichos ángulos.

a) 60° y 60° b) 30° y 90° c) 45° y 75°
d) 70° y 50° e) 40° y 80°

37. Si : $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, calcule el máximo valor entero de "xº", siendo el ángulo CAB agudo.



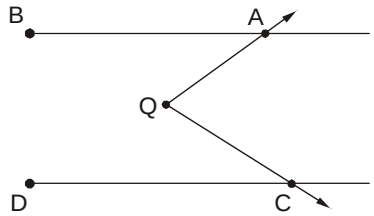
a) 18° b) 17° c) 16°
d) 15° e) 12°

38. Dados los rayos consecutivos : $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$, $\overrightarrow{OA_3}$, ... $\overrightarrow{OA_n}$, contenidos en un mismo plano, donde "n" ángulos consecutivos y la suma de 2 ángulos consecutivos es siempre agudo. Calcule el menor valor entero que puede tener "n"?

a) 6 b) 7 c) 8
d)9 e) 10

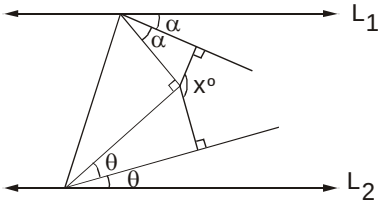
39. Si : $\overline{AB} // \overline{DC}$, $\frac{m\sphericalangle BAQ}{m\sphericalangle DCQ} = \frac{3}{2}$ y

$m\sphericalangle AQC = 100°$, calcule el complemento del ángulo DCQ.



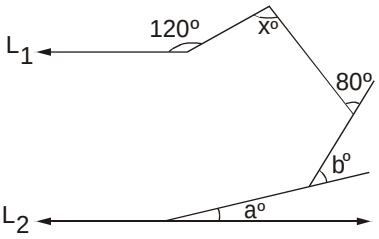
a) 20° b) 60° c) 50°
d) 70° e) 80°

40. Calcule "xº", siendo : $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$.



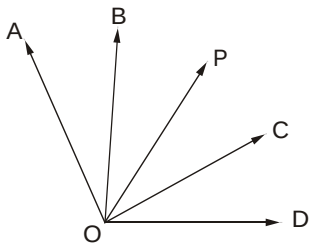
a) 60° b) 75° c) 105°
d) 135° e) 140°

41. Calcule "xº", si : aº + bº = 50° y $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$.



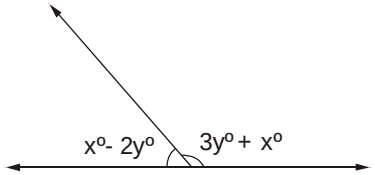
a) 40° b) 50° c) 70°
d) 60° e) 65°

42. En el gráfico, el rayo $\overrightarrow{OP}$ es bisecriz del ángulo AOD, siendo : m∢POC - m∢BOP = 20°.
Calcule m∢AOB - m∢COD.



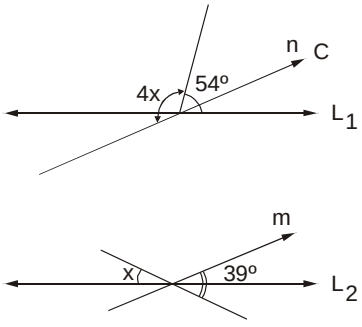
a) 22° b) 40° c) 25°
d) 10° e) 20°

43. En el gráfico, calcule el máximo valor entero de "yº".



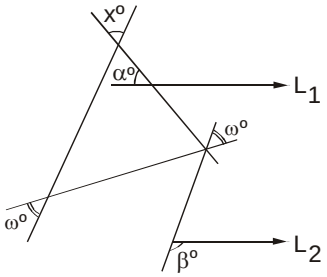
a) 50° b) 35° c) 41°
d) 40° e) 52°

44. Si : $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$ y n //m, calcule "xº".



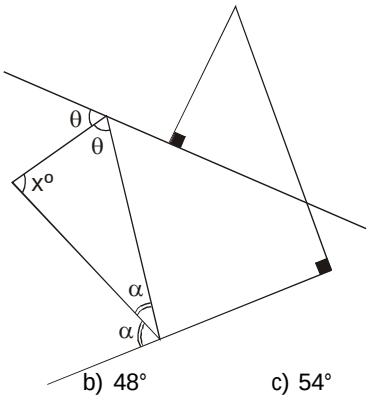
a) 20° b) 30° c) 33°
d) 35° e) 40°

45. En el gráfico : βº–αº = 78° y $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, calcule "xº".



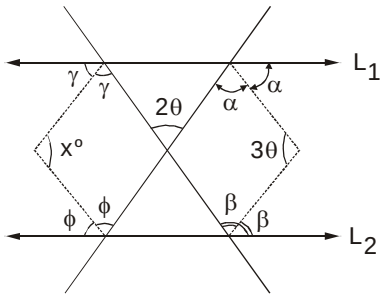
a) 76° b) 78° c) 70°
d) 90° e) 82°

46. En el gráfico, calcule el mínimo valor entero de "xº".



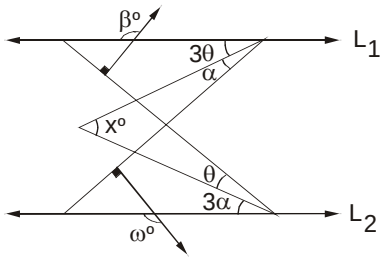
a) 46° b) 48° c) 54°
d) 56° e) 63°

47. Si : $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, calcule "xº".



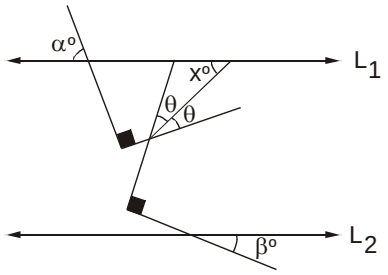
a) 143° b) 127° c) 150°
d) 135° e) 165°

48. Si : $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, calcule "xº". Si : βº+ωº = 220°.



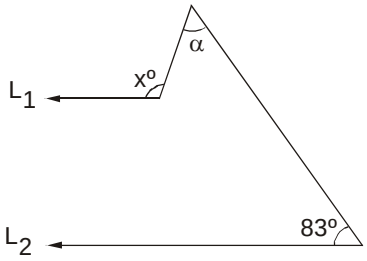
a) 10° b) 20° c) 30°
d) 40° e) 50°

49. Si : $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$ y $\alpha^o+\beta^o=110^o$, calcule "x^o".



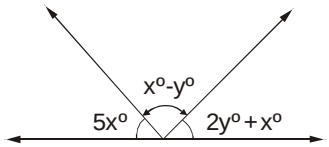
a) 35° b) 45° c) 40°
d) 30° e) 25°

50. Calcule la razón aritmética del máximo y mínimo valor entero que puede tomar "x^o", si "α" es la medida de un ángulo agudo, en el gráfico $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$.



a) 90° b) 85° c) 87°
d) 88° e) 86°

51. Del gráfico, calcule el valor de la razón aritmética entre x e y, cuando "x^o" toma su mínimo valor entero.



a) 8° b) 3° c) 4°
d) 5° e) 6°

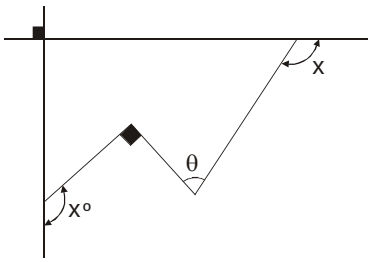
52. Si un ángulo mide 180° es dividido en "n" ángulos consecutivos y congruentes :
$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ... \alpha_n$, calcule la medida del ángulo que forman las bisectrices de α_5 y α_8, sabiendo que las bisectrices de α_3 y α_{n-2} son perpendiculares.

a) 44° b) 45° c) 48°
d) 52° e) 54°

53. Sean : AOB, BOC, COD, DOE y EOF ángulos consecutivos tales que : $m\sphericalangle AOF = 154°$ y
$m\sphericalangle AOD = m\sphericalangle BOE = m\sphericalangle COF$.
Calcule la $m\sphericalangle BOC$, si la medida del ángulo formado por la bisectriz del ángulo COD y el rayo $\overrightarrow{OE}$ es igual a 54°.

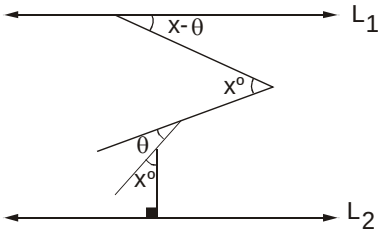
a) 23° b) 28° c) 63°
d) 36° e) 75°

54. Del gráfico, calcule el máximo valor entero impar de "x^o", si "θ" es la medida de un ángulo agudo.



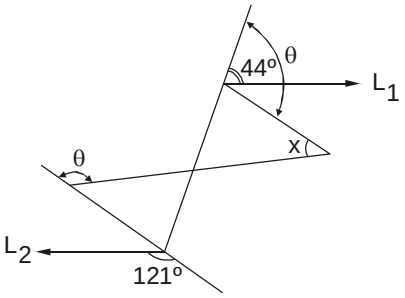
a) 100° b) 120° c) 130°
d) 133° d) 145°

55. Del gráfico, calcule el valor de "θ" cuando "x" toma su mínimo valor entero par. Si : $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$.



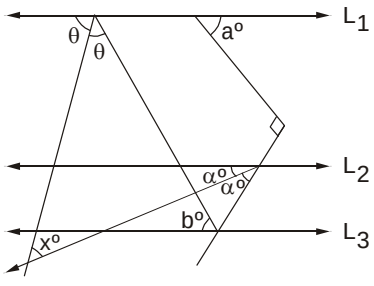
a) 34° b) 32° c) 28°
d) 29° e) 30°

56. Según el gráfico, calcule "x^o", si : $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$.



a) 66° b) 85° c) 77°
d) 70° e) 80°

57. Calcule "x^o", si : $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2} // \overleftrightarrow{L_3}$ y $a° - b° = 36°$.

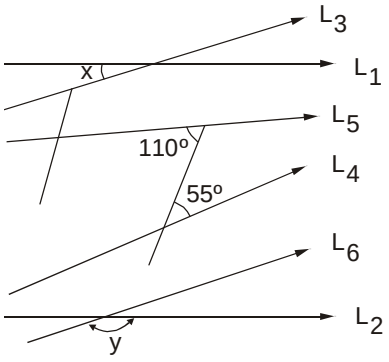


a) 54° b) 72° c) 36°
d) 63° e) 52°

58. Si el suplemento del complemento de la mitad del mayor ángulo que forman la bisectriz del ángulo adyacente a un ángulo "β" y el lado no común es 140°, calcule "β".

a) 10° b) 12° c) 15°
d) 20° e) 30°

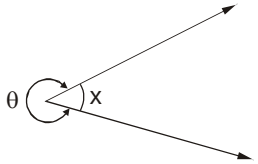
59. En el gráfico : $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, $\overleftrightarrow{L_3} // \overleftrightarrow{L_4}$, $\overleftrightarrow{L_5} // \overleftrightarrow{L_6}$, calcule : $x^o + y^o$.



a) 170° b) 180° c) 210°
d) 235° e) 245°

60. En el gráfico, calcule $(\frac{\theta}{x})$, cuando "x" sea máximo.

Siendo : $x = (6a - a^2)^\circ$.



a) 0° b) 39° c) 35°
d) 36° e) 30°

Claves

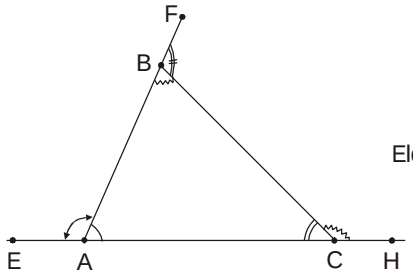
21.	d
22.	e
23.	d
24.	b
25.	b
26.	c
27.	d
28.	d
29.	b
30.	c
31.	e
32.	e
33.	d
34.	d
35.	a
36.	e
37.	c
38.	d
39.	c
40.	d

41.	c
42.	d
43.	b
44.	c
45.	b
46.	a
47.	d
48.	c
49.	a
50.	d
51.	c
52.	e
53.	a
54.	d
55.	d
56.	c
57.	d
58.	d
59.	d
60.	b

Capítulo

2 TRIÁNGULOS

Definición :

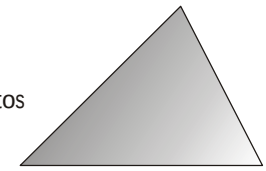


Elementos
1. Vértices : A, B, C
2. Lados : $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$
3. Ángulos
   - Interiores : $\sphericalangle$ A, $\sphericalangle$ B, $\sphericalangle$ C
   - Exteriores : $\sphericalangle$ EAB, $\sphericalangle$ FBC, $\sphericalangle$ BCH

Notación : Δ_{ABC} , T_{ABC} , etc.

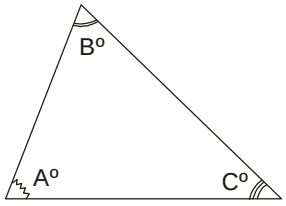
Observaciones :

* Se denomina región triangular a la reunión de los puntos interiores con el conjunto de puntos de sus lados.



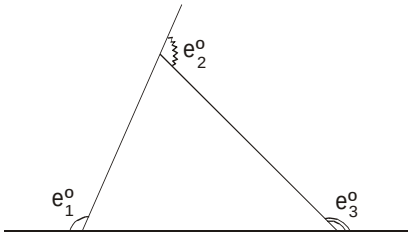
Propiedades Básicas

1.



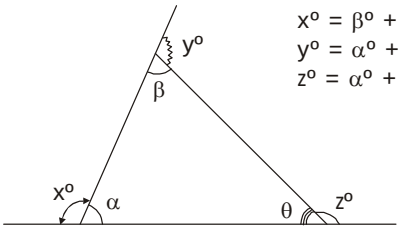
$A^o + B^o + C^o = 180^o$

2.



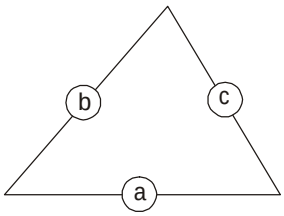
$e^o_1 + e^o_2 + e^o_3 = 360^o$

3.



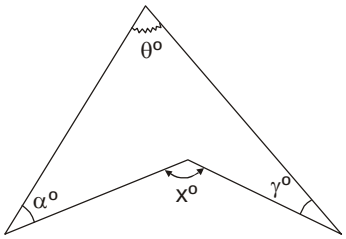
$x^o = \beta^o + \theta^o$
$y^o = \alpha^o + \theta^o$
$z^o = \alpha^o + \beta^o$

4.



$b - c < a < b + c$

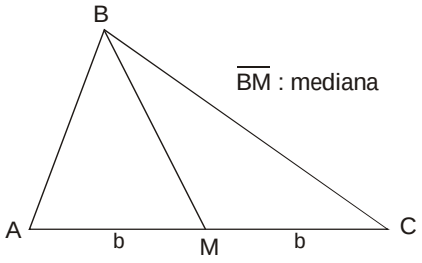
5.



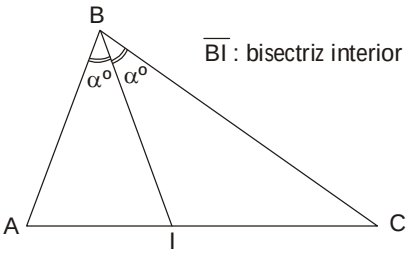
$x^o = \alpha^o + \theta^o + \gamma^o$

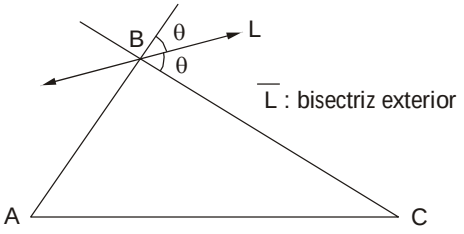
Líneas Notables en el Triángulo

1. Mediana

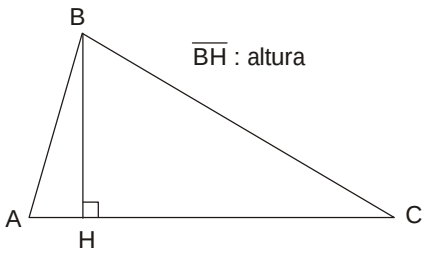


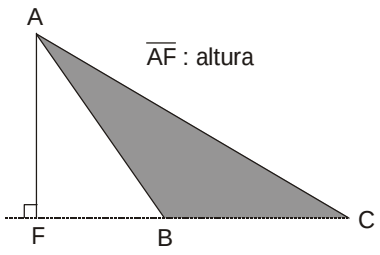
2. Bisectriz



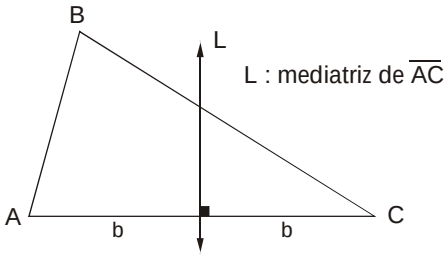


3. Altura

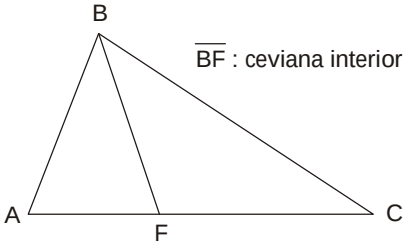


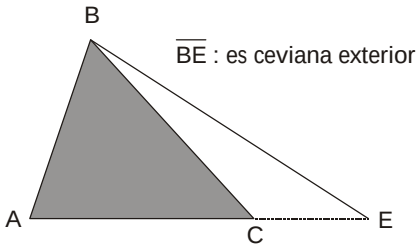


4. Mediatriz



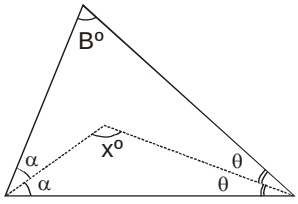
* Ceviana





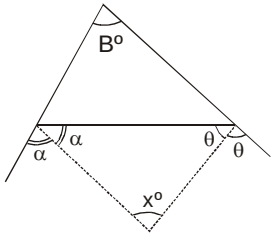
Relaciones Angulares

1.



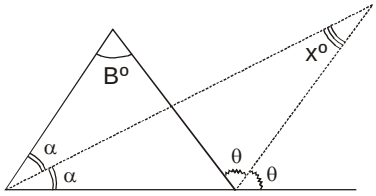
$$x^\circ = 90^\circ + \frac{B^\circ}{2}$$

2.



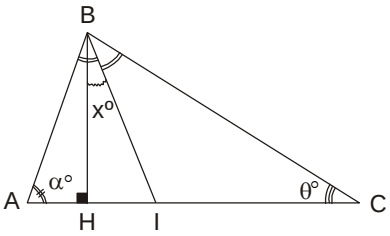
$$x^\circ = 90^\circ - \frac{B^\circ}{2}$$

3.



$$x^\circ = \frac{B^\circ}{2}$$

4.



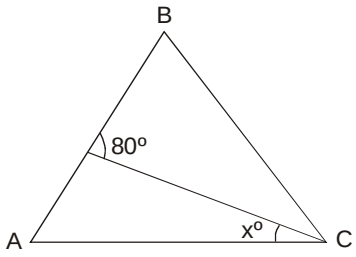
$$x^\circ = \frac{\alpha^\circ - \theta^\circ}{2}$$

$\overline{BH}$: altura

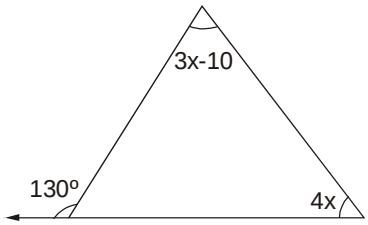
$\overline{BI}$: bisectriz

Test de aprendizaje preliminar

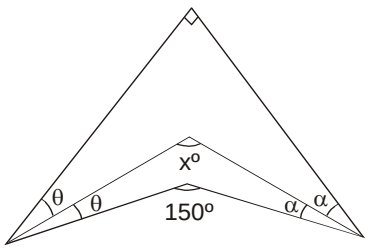
01. En el gráfico, el triángulo ABC es equilátero, calcule "xº".



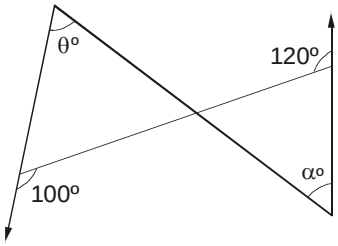
02. En el gráfico, calcule "xº".



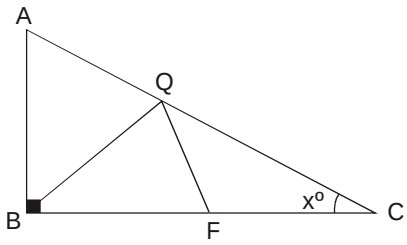
03. En el gráfico, calcule "xº".



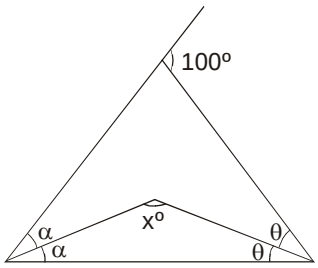
04. En el gráfico, calcule $(\alpha^o - \theta^o)$.



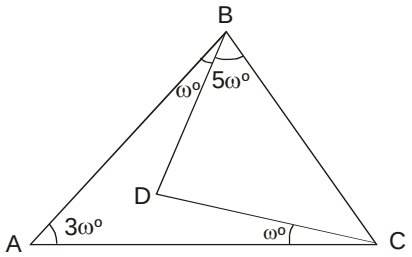
05. En el gráfico, calcule "xº", si : AB = BQ = QF = FC.



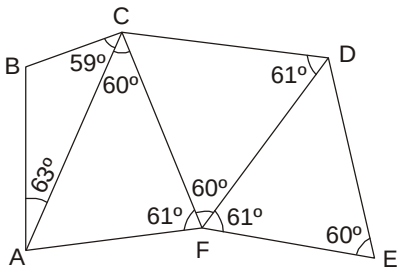
06. En el gráfico, calcule "xº".



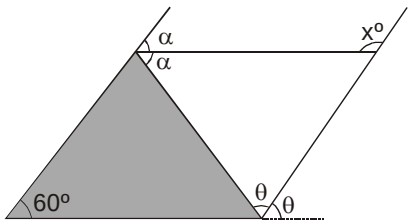
07. En el gráfico, AB = DC, calcule "ωº".



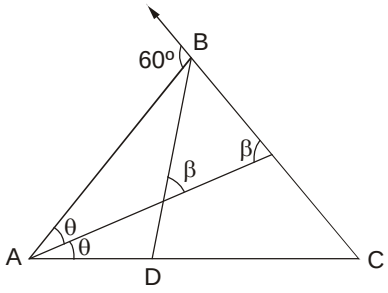
08. En el gráfico mostrado, ¿cuál de los segmentos es el de menor longitud?



09. Calcule "xº".



10. Calcule la m∢ BDC.



Practiquemos :

11. Calcule el ángulo que forman las perpendiculares trazadas desde el vértice B de un triángulo ABC a las bisectrices interiores de los ángulos A y C, si :
m∢ B = 110°.

12. Las medidas de los ángulos internos de un triángulo están en progresión aritmética cuya razón es 10. Calcule la medida de cada ángulo.

13. En un triángulo ABC (m∢ B>90°), se sabe que :
BC = 2 cm y AC = 5 cm. Calcule el valor o valores enteros que puede adoptar AB.

14. En un triángulo acutángulo, dos de sus lados suman 30u. Calcule el mayor valor entero que puede tomar la altura relativa al tercer lado.

15. Los lados de un triángulo isósceles miden 5 u y 13 u. Calcule su perímetro.

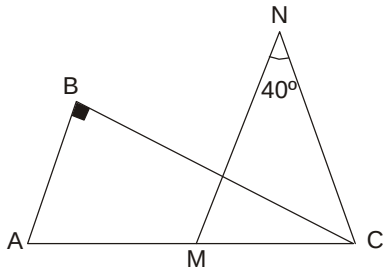
16. En un triángulo ABC, $m\sphericalangle A = 2(m\sphericalangle C)$, la bisectriz interior $\overline{BD}$ prolongada intersecta en "E" a la bisectriz exterior del ángulo C. Si : DE = 8u. Calcule CE.

17. En un triángulo ABC, la medida del ángulo formado por la bisectriz interior del ángulo A, y la bisectriz exterior del ángulo C es siete veces la medida del ángulo B. Calcule la medida del ángulo B.

18. Los catetos de un triángulo rectángulo ABC, miden : AB = 16 u, BC = 30 u, se traza la altura $\overline{BH}$ y las bisectrices $\overline{BP}$, y $\overline{BQ}$ de los ángulos ABH y HBC respectivamente. Calcule PQ.

19. En un triángulo ABC, la suma de las medidas de los ángulos B y C es 105°. Si la medida del ángulo A excede a la medida del ángulo B en 4°. Calcule la medida del ángulo C.

20. En el gráfico, NM = NC y $\overline{CB}$ es bisectriz del ángulo ACN. Calcule la $m\sphericalangle BAC$.



Problemas propuestos

21. Las medidas de los ángulos internos de un triángulo son proporcionales a los números 3, 4 y 5. Calcule la medida de cada ángulo.

a) 60°, 80° y 100° b) 40°, 60° y 80°
c) 30°, 40° y 50° d) 45°, 60° y 75°
e) 36°, 48° y 60°

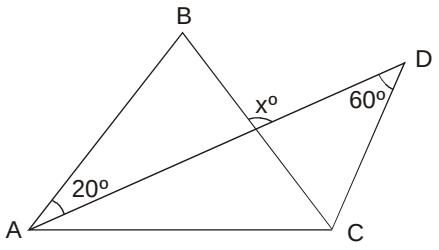
22. Calcule la medida del ángulo formado por la altura y la bisectriz que parten del vértice A de un triángulo ABC. Sabiendo que : $m\sphericalangle A + 2(m\sphericalangle C) = 100°$.

a) 20° b) 30° c) 40°
d) 50° e) 60°

23. Los catetos de un triángulo rectángulo ABC miden AB = 8 u; BC = 15 u. Se traza la altura $\overline{BH}$ y las bisectrices $\overline{BP}$ y $\overline{BQ}$ de los ángulos ABH y HBC respectivamente. Calcule PQ.

a) 2 u b) 4 u c) 5 u
d) 6 u e) 3 u

24. En el gráfico, calcule "xº", si : $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ son bisectrices de los ángulos A y C respectivamente.



a) 130° b) 100° c) 120°
d) 70° e) 110°

25. Calcule la medida de los ángulos de un triángulo ABC, si: $3(m\sphericalangle B) = 2(m\sphericalangle A)$ y $3(m\sphericalangle C) = 7(m\sphericalangle A)$.

a) 20°, 30°, 130° b) 45°, 30°, 105°
c) 48°, 32°, 100° d) 51°, 34°, 195°
e) 60°, 40°, 80°

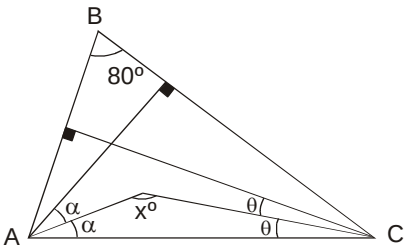
26. Dado el triángulo ABC; si por el vértice C se traza $\overline{CH}$ perpendicular a $\overline{AB}$ y también la bisectriz exterior del ángulo C y la diferencia de las medidas de los ángulos A y B es 26°. Calcule la medida del ángulo que forma la bisectriz y la perpendicular.

a) 110° b) 123° c) 103°
d) 77° e) 96°

27. En el triángulo ABC, $\overline{AD}$ es la altura correspondiente al lado $\overline{BC}$ y $\overline{BE}$ es la bisectriz del ángulo B, las cuales se cortan en F. Si : $m\sphericalangle A = 64°$ y $m\sphericalangle C = 42°$. Calcule la medida del ángulo AFB.

a) 127° b) 150° c) 170°
d) 132° e) 130°

28. Calcule "x°".

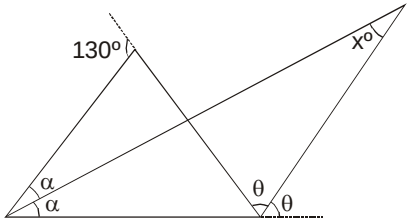


a) 140° b) 130° c) 120°
d) 110° e) 125°

29. Sobre el lado $\overline{BC}$ de un triángulo ABC, se ubica el punto "D", tal que la medida del ángulo ADC es igual a la semisuma de los ángulos interiores de A y B. Calcule BD, si además :
AC = 12 u y BC = 16 u.

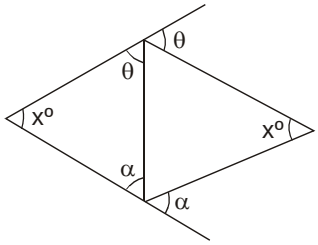
a) 14 u b) 10 u c) 8 u
d) 4 u e) 6 u

30. Calcule "xº".



a) 15° b) 20° c) 25°
d) 30° e) 50°

31. En el gráfico, calcule "xº".



a) 12° b) 18° c) 24°
d) 36° e) 60°

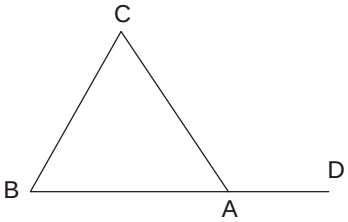
32. En un triángulo ABC, $m\sphericalangle A = 2m\sphericalangle C$, AB = 4 u. Calcule el máximo y mínimo valor entero que puede tomar el lado $\overline{BC}$.

a) 8 u y 7 u b) 5 u y 4 u c) 5 u y 2 u
d) 7u y 6 u e) 5 u y 3 u

33. Si dos lados de un triángulo son 15 u y 18 u, el tercer lado puede ser :

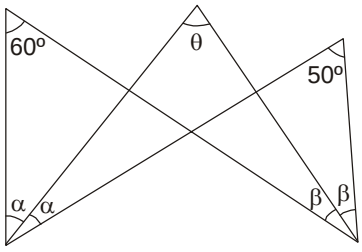
a) 1 u b) 2 u c) 12 u
d) 35 u e) 3 u

34. El ángulo CAD es igual a tres veces el ángulo CAB y el ángulo BCA es mayor al ángulo CBA. El mayor lado del triángulo ABC es :



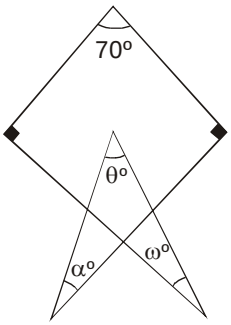
a) $\overline{BC}$
b) $\overline{AB}$
c) $\overline{AC}$
d) Puede ser $\overline{AC}$ o $\overline{BC}$ dependiendo de la forma del triángulo.
e) No se puede determinar los datos.

35. Calcule "θ^o".



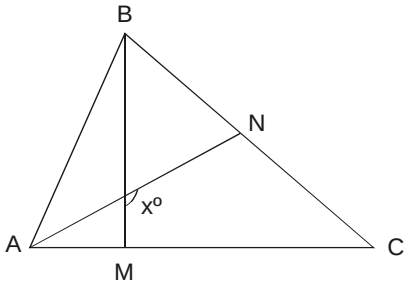
a) 110° b) 110° c) 90°
d) 55° e) 60°

36. Calcule : $\alpha^o+\theta^o+\omega^o$.



a) 70° b) 100° c) 110°
d) 140° e) 130°

37. En el triángulo ABC, m$\sphericalangle$A = 80°, m$\sphericalangle$B = 60°. Si : $\overline{AN}$ y $\overline{BM}$ son alturas, calcule : "xº".

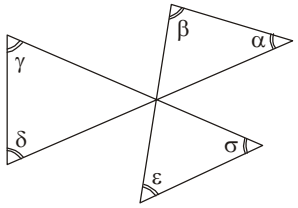


a) 40° b) 140° b) 120°
d) 50° e) 60°

38. Calcule el número de triángulos escalenos que tienen todos los lados enteros y de perímetro 22 cm.

a) 5 b) 6 c) 4
c) 7 e) 8

39. En el gráfico, calcule la suma de las medidas de los ángulos señalados.

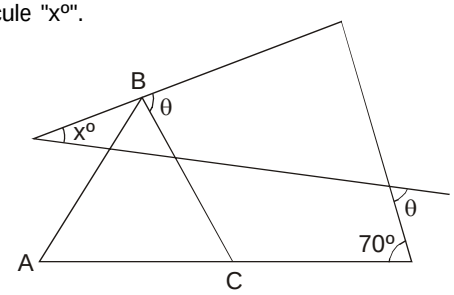


a) 405° b) 180° c) 390°
d) 450° e) 360°

40. En un triángulo ABC, se traza la ceviana $\overline{BT}$, si : AB = AT, BC = AC. Calcule el máximo valor entero de la m$\sphericalangle$CBT.

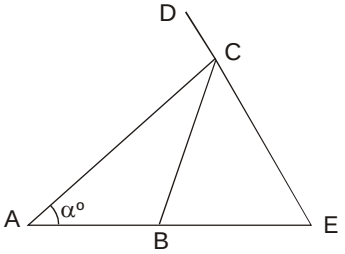
a) 36° b) 35° c) 30°
d) 45° e) 44°

41. En el gráfico, el triángulo ABC es equilátero. Calcule "xº".



a) 10° b) 45° c) 36°
d) 72° e) 30°

42. En el gráfico, AB = BC, $\overline{BC} \perp \overline{DE}$ y el ángulo BEC mide 35°. Calcule "α^o".

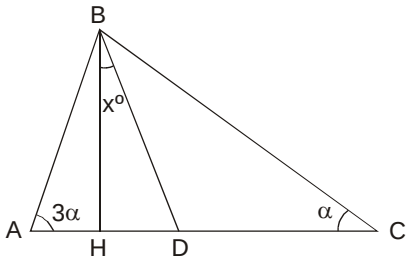


a) 32° 30' b) 30° 30' c) 27° 30'
d) 20° 15' e) 20° 5'

43. Sea el triángulo ABC en el cual se cumple que : m$\sphericalangle$ABC = 64°, m$\sphericalangle$ACB = 72° y $\overrightarrow{BM}$ y $\overrightarrow{CP}$ bisectrices de los ángulo ABC y ACB respectivamente; dichas bisectrices se intersectan en el punto I (incentro). Además, se traza la altura $\overline{BH}$. Calcule la medida de los ángulos BIC y MBH.

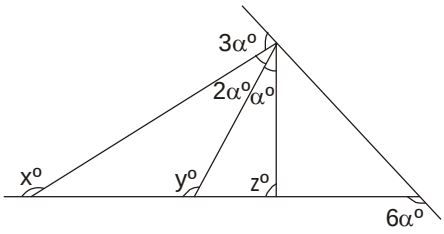
a) 112° y 16° b) 120° y 12° c) 11° y 14°
d) 110° y 12° e) 112° y 14°

44. En el gráfico, $\overline{BH}$ es altura del triángulo ABC y $\overline{BD}$ es bisectriz del ángulo ABC. Calcule "xº".



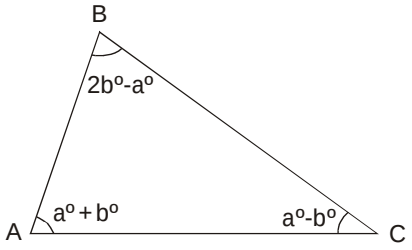
a) 2α b) α c) $\alpha/2$
d) $2\alpha/3$ e) $\alpha/3$

45. En el gráfico, calcule el máximo valor entero de $\alpha°$.
Si : x° + y° + z° > 300°.



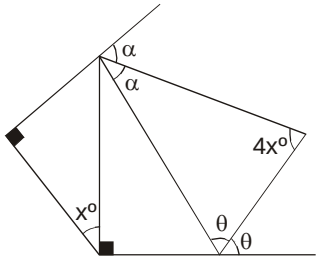
a) 22° b) 23° c) 24°
d) 25° e) 26°

46. En el gráfico, las medidas de los ángulos interiores del triángulo ABC están dadas en grados sexagesimales. Calcule el menor valor entero (en grados sexagesimales) que puede tomar "bº".



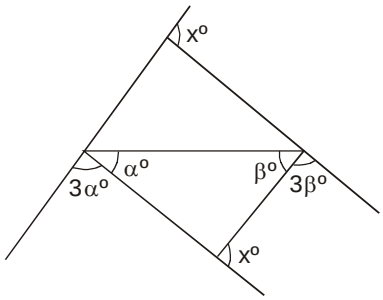
a) 45° b) 46° c) 40°
d) 35° e) 36°

47. Calcule "xº".



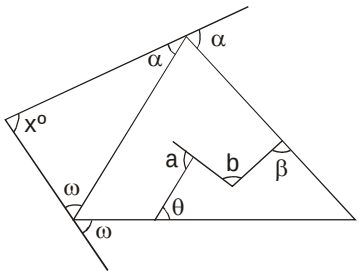
a) 18° b) 20° c) 22°
d) 25° e) 30°

48. En el gráfico, calcule "xº".



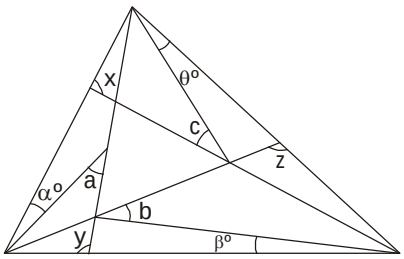
a) 60° b) 45° c) 36°
d) 72° e) 30°

49. En el gráfico, calcule "xº".
Si : $a + b = \beta + \theta + 50°$.



a) 62° b) 66° c) 63°
d) 64° e) 65°

50. En el gráfico :
x+y+z = 240° y a+b+c = 170°.
Calcule : $\alpha^o+\beta^o+\theta^o$.

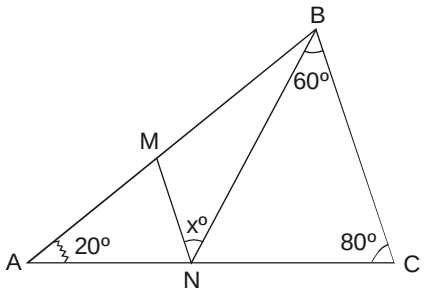


a) 60° b) 80° c) 100°
d) 140° e) 50°

51. La bisectriz de uno de los ángulos de un triángulo escaleno, forma con el lado opuesto dos ángulos que son entre sí como 7 es a 13. Calcule el menor de los ángulos del triángulo asumiendo que la medida que la medida en grados de cada uno de los tres ángulos es un número entero menor que 80º.

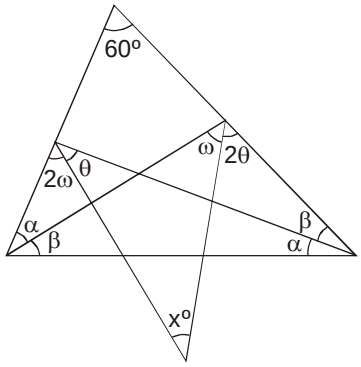
a) 24º b) 25º c) 26º
d) 27º e) 28º

52. Calcule "xº", si ; AM = NC.



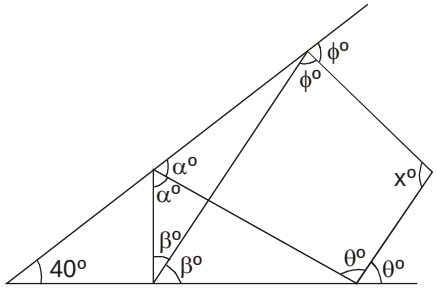
a) 40° b) 60° c) 80°
d) 90° e) 70°

53. En el gráfico, calcule "x° ".



a) 45° b) 60° c) 30°
d) 90° e) 75°

54. En el gráfico, calcule "xº".

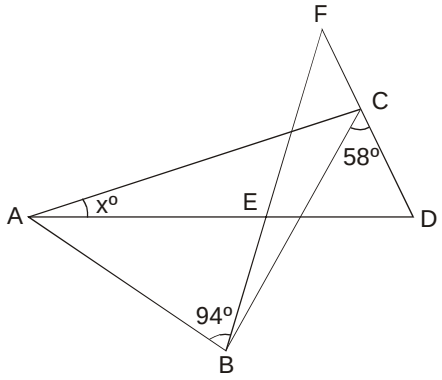


a) 115° b) 125° c) 135°
d) 14° e) 140°

55. Dado un triángulo ABC equilátero, se ubica el punto D exterior al triángulo, tal que el segmento $\overline{BD}$ intersecta al lado $\overline{AC}$.
Si m$\sphericalangle$ ADC > 90°, AD = 8u y CD = 15u. Calcule el menor perímetro entero del triángulo ABC.

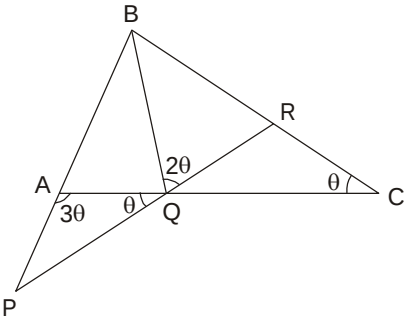
a) 52 u b) 24 u c) 22 u
d) 46 u e) 48 u

56. En el gráfico, calcule "xº", AB = BC, EF = FD.



a) 20° b) 15° c) 30°
d) 18° e) 25°

57. En el gráfico : PA = 2 u y BR - RC = 3 u.
Calcule PQ.



a) 6 u b) 5 u c) 4 u
d) 3 u e) 7 u

58. En un triángulo ABC, se traza la bisectriz interior $\overline{BM}$, si :
m$\sphericalangle$ ACB = β º, m$\sphericalangle$ CAB = αº+βº y la medida del ángulo exterior del ángulo A es "α" , donde :
AB = 8u, MC = 3u. Calcule BC.

a) 10 u b) 11 u c) 12 u
d) 13 u e) 14 u

59. En un triángulo ABC se traza la ceviana $\overline{BP}$, si :
AB = PC.
m$\sphericalangle$ BAC = 10θº, m$\sphericalangle$ BCA = 2θº.
m$\sphericalangle$ CBP = θº. Calcule "θº".

a) 5º b) 8º c) 9º
d) 10º e) 12º

60. En un triángulo ABC, se traza la ceviana $\overline{BT}$, si :
BC = AT y m$\sphericalangle$ BAC = 60º - 2xº ;
m$\sphericalangle$ CBT = xº, m$\sphericalangle$ BCA = 2xº.
Calcule la m$\sphericalangle$ CBT.

a) 5º b) 8º c) 10º
d) 12º e) 15º

Claves

21.	d
22.	c
23.	a
24.	d
25.	b
26.	c
27.	c
28.	a
29.	a
30.	c
31.	d
32.	c
33.	d
34.	e
35.	b
36.	d
37.	a
38.	a
39.	d
40.	c

41.	a
42.	a
43.	e
44.	b
45.	c
46.	b
47.	b
48.	d
49.	e
50.	e
51.	b
52.	c
53.	b
54.	b
55.	a
56.	d
57.	b
58.	b
59.	d
60.	c

Capítulo

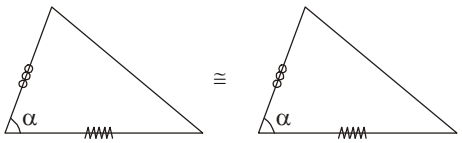
3

CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

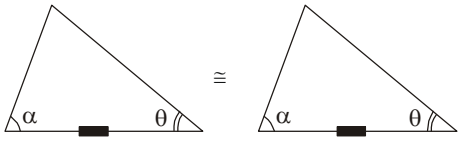
Definición :

Dos segmentos, dos ángulos o dos figuras geométricas en general, serán congruentes si tiene la misma forma y el mismo tamaño. Para la congruencia de dos triángulos, se postulan los siguientes casos :

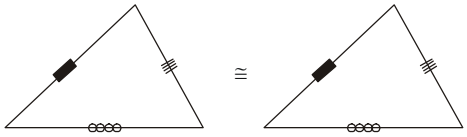
Postulado (LAL)



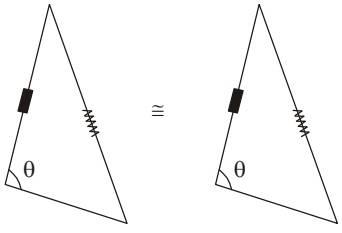
Postulado (ALA)



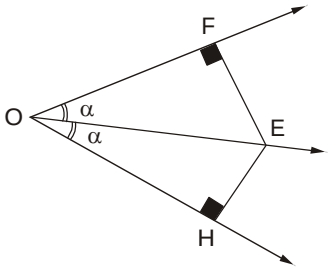
Postulado (LLL)



Postulado (LLA)



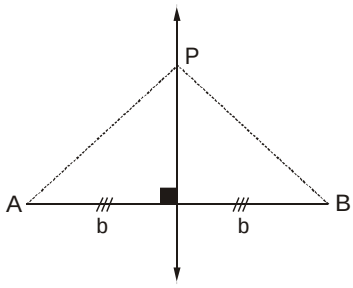
Propiedad de la Bisectriz



$\overline{EF} \cong \overline{EH}$

$\overline{OF} \cong \overline{OH}$

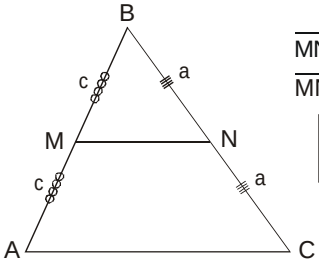
Propiedad de la Mediatriz



PA = PB

El Δ APB es isósceles.

Teorema de la Base Media

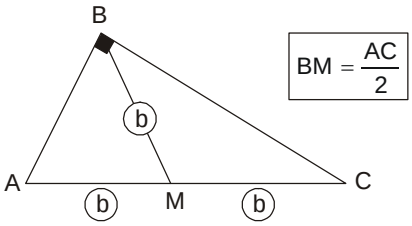


$\overline{MN}$: base media

$\overline{MN} \,//\, \overline{AC}$

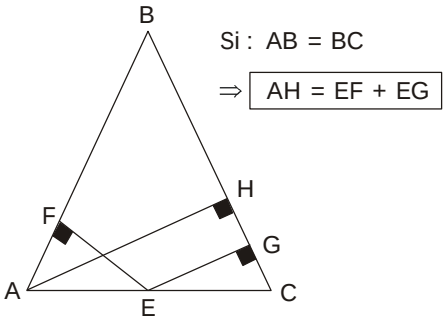
$$MN = \frac{AC}{2}$$

Teorema de la Menor Mediana en el Triángulo Rectángulo

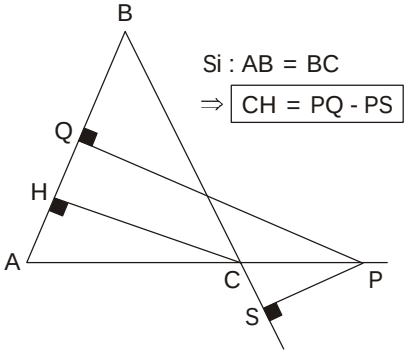


En el Triángulo Isósceles

*

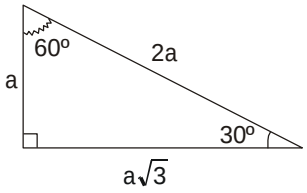


*

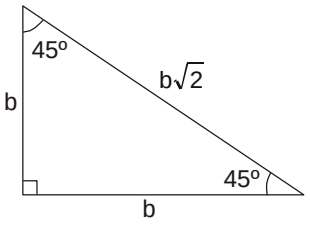


TRIÁNGULOS NOTABLES

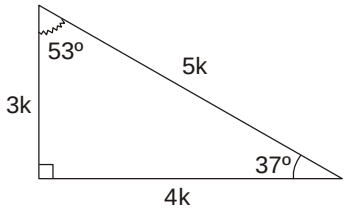
* ***De 30° y 60°***



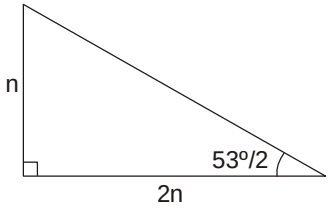
* ***De 45° y 45°***



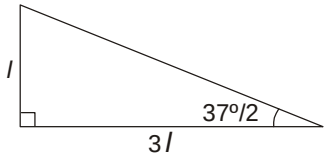
* ***De 37° y 53°***



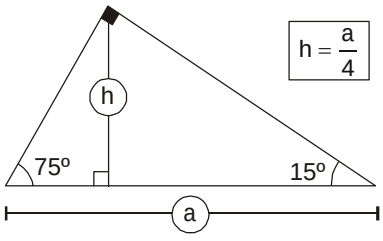
* ***De $\frac{53°}{2}$***



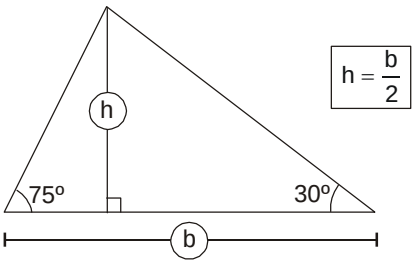
* ***De $\frac{37°}{2}$***



* ***De 15° y 75°***

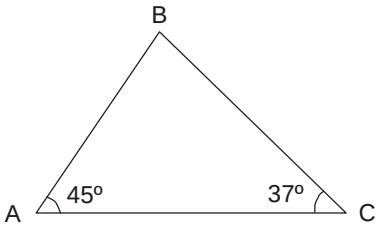


* ***De 30° y 75°***

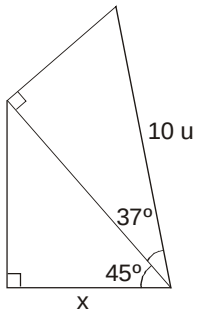


Test de aprendizaje preliminar

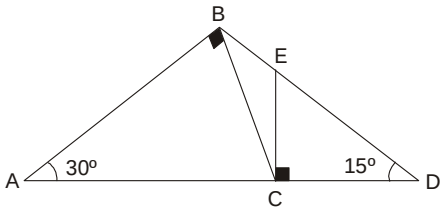
01. En el gráfico, calcule AB, si : BC = 15 u.



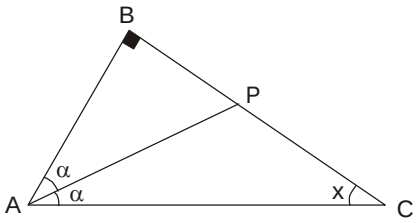
02. En el gráfico, calcule "x".



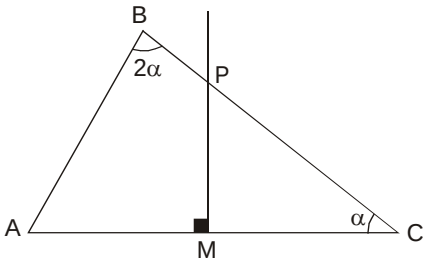
03. En el gráfico, ED = 12u. Calcule AC.



04. En el gráfico, calcule "xº". 2BP = PC.

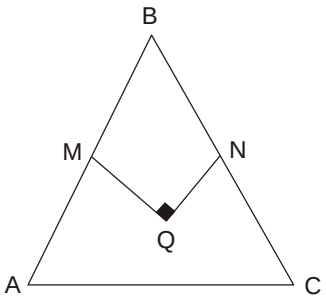


05. En el gráfico, $\overline{PM}$ es mediatriz de $\overline{AC}$. Calcule AB. Si : PC = 8 m.

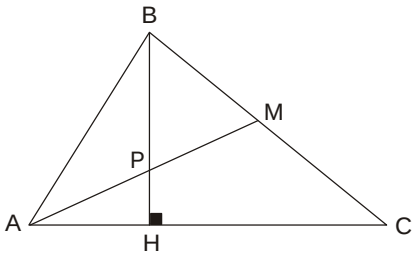


06. En un triángulo ABC, se ubican los puntos medios M y N de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. El segmento que une los puntos medios de $\overline{MC}$ y $\overline{NA}$ mide 2u. Calcule AC.

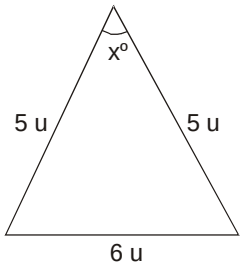
07. En el gráfico, calcule QN, si :
AC = 10 u y MQ = 4u , AM = MB, BN = NC.



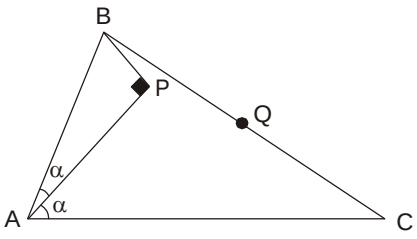
08. En el gráfico, calcule PH, si : BH = 36 u.
(AP = PM) y (BM = MC).



09. Calcule "xº".

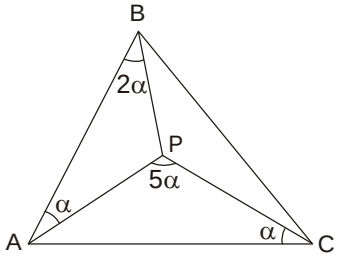


10. En el gráfico, calcule PQ, si :
AB = 6 u y AC = 8 u, BQ = QC.

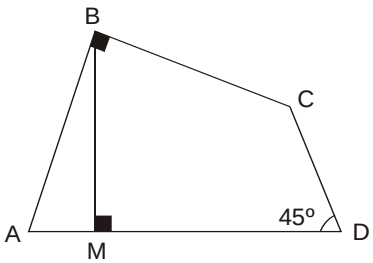


Practiquemos :

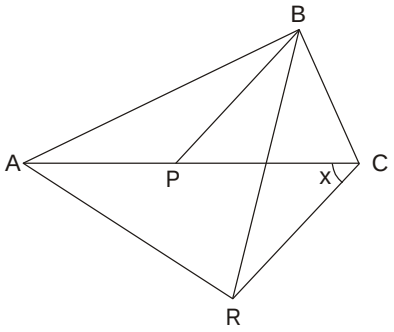
11. En el gráfico : AC = 16 m. Calcule AP. (AB = PC).



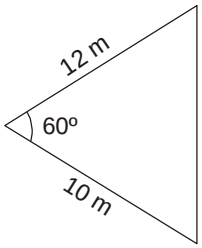
12. En el gráfico : AB = BC, BM = 1 u, calcule AD.



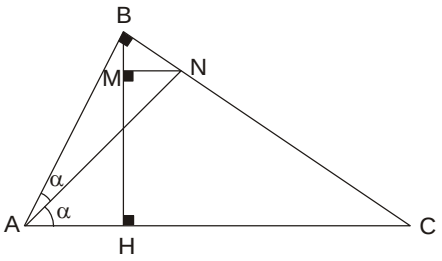
13. En el gráfico, calcule : "xº", si los triángulos ABR y PBC son equiláteros.



14. En el gráfico, calcule el perímetro del triángulo.

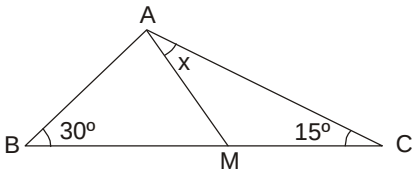


15. En el gráfico, calcule MN, si : AH = 5 u, BH = 12 u.

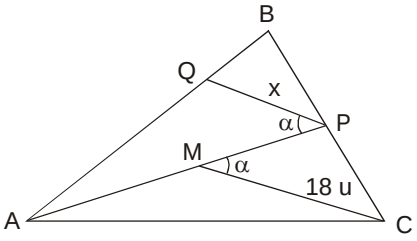


16. En un triángulo ABC, la medida del $\sphericalangle$ ABC es igual a 128°. Las mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ cortan a $\overline{AC}$ en los puntos R y S, respectivamente. Luego, la suma de las medidas de los ángulos ABR y SBC es :

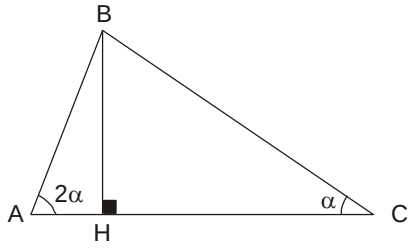
17. En el gráfico, BM = MC. Calcule "xº".



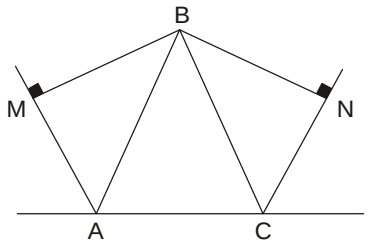
18. En el gráfico, calcule "xº". BP = PC y AM = MP.



19. En el gráfico : AH = 2 u y HC = 8 u. Calcule AB.

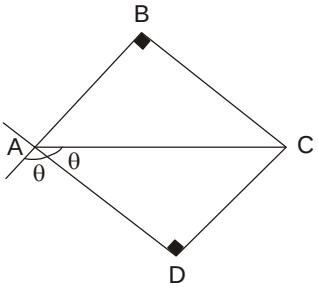


20. En el gráfico, $\overline{AM}$ y $\overline{CN}$ son bisectrices exteriores del A y C, AB = 6 u, BC = 12 u, AC = 16 u. Calcule MN.



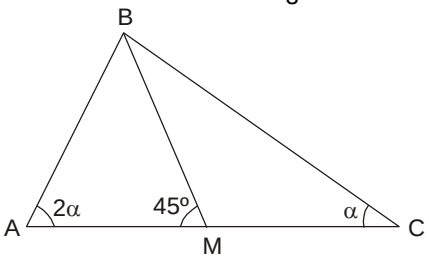
Problemas propuestos

21. Calcule BD, si : CD = 8 u.



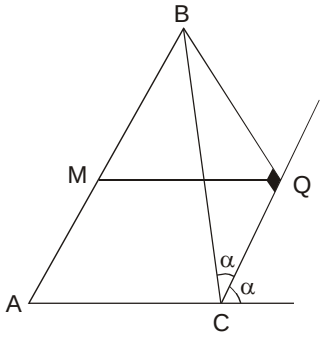
a) 8 u b) 4 u c) 16 u
d) 2 u e) 12 u

22. En el gráfico, AM = MC. Calcule $\frac{\alpha^o}{3}$.



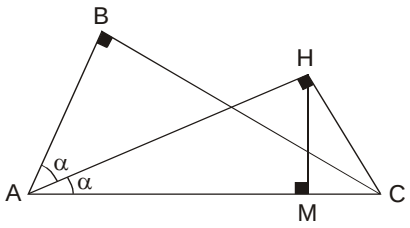
a) 10° b) 12° c) 5°
d) 15° e) 18°

23. En el gráfico, BC = 18 u, AC = 6 u y "M" es el punto medio de AB. Calcule MQ.



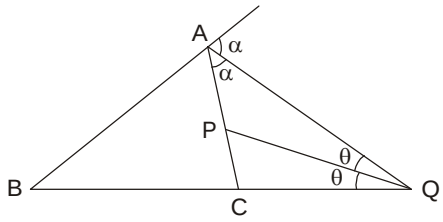
a) 10 u b) 12 u c) 13 u
d) 14 u e) 15 u

24. En el gráfico, calcule BC, si : HM = 6 u.



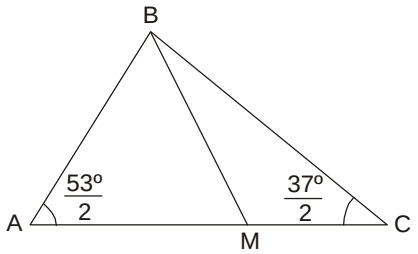
a) 9 u b) 12 u c) 15 u
d) 18 u e) 24 u

25. En el gráfico, AB = BC. Calcule QC, si : AQ = 8 u; PC = 2 u.



a) 4 u b) 8 u c) 3 u
d) 6 u e) 12 u

26. En el gráfico, calcule la m$\sphericalangle$ ABM. Si : AM = MC.

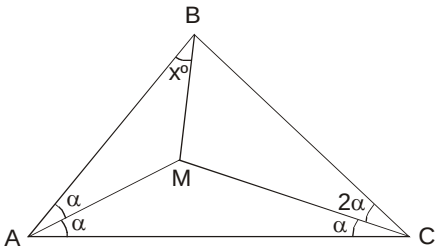


a) 37° b) 53° c) 45°
d) 60° e) 90°

27. Sea ABC un triángulo escaleno. La mediatriz de $\overline{BC}$ corta a $\overline{AC}$ en "F" y se cumple que: AB = AF = FC. Calcule la m∢ ACB.

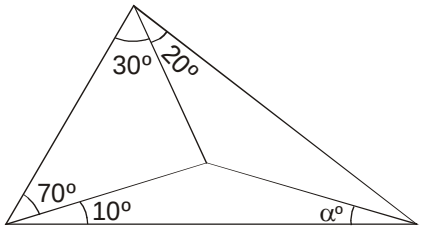
a) 53° b) 15° c) 30°
d) 37° e) 60°

28. En el gráfico, calcule "xº", si : BC = MC.



a) 20° b) 25° c) 30°
d) 45° e) 37°

29. En el gráfico, calcule "αº".

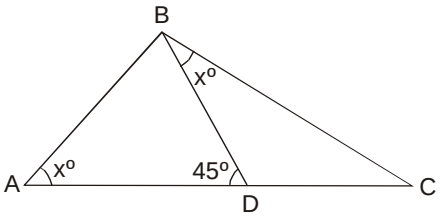


a) 9° b) 10° c) 15°
d) 22,5° e) 30°

30. Se ubica un punto P en el interior de un triángulo ABC, tal que : AP = AB = BC, si : m∢ ACP = 30°, m∢ CAP = 10°. Calcule la m∢ BAP.

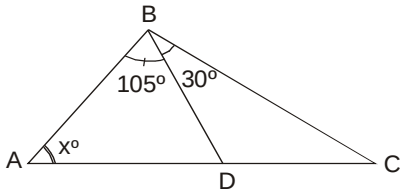
a) 20° b) 40° c) 30°
d) 10° e) 15°

31. En el gráfico, calcule : "xº", si : AD = DC.



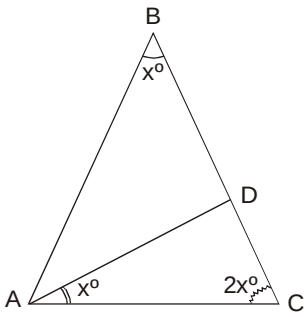
a) 15° b) 20° c) 25°
d) 30° e) 35°

32. En el gráfico, calcule "xº", si : AD = DC.



a) 10° b) 12° c) 15°
d) 20° e) 30°

33. En el gráfico, calcule "xº", si : AB = AD + DC.

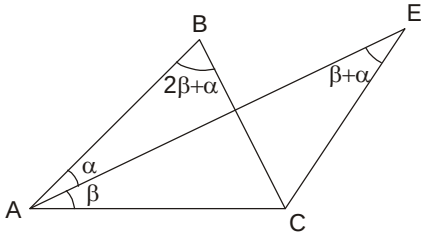


a) 10° b) 12° c) 15°
d) 18° e) 36°

34. En un triángulo ABC se traza la ceviana $\overline{BD}$, tal que : $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y D está en el lado $\overline{AC}$. Además : m∢ ABD = 60° y m∢ BAC = 20°. Calcule la m∢ BCA.

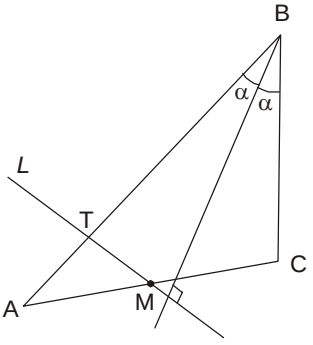
a) 15° b) 30° c) 25°
d) 22° 30' e) 20°

35. En el gráfico, calcule AE.
Si : BC = 36 u y EC = 24 u. AB = AC.



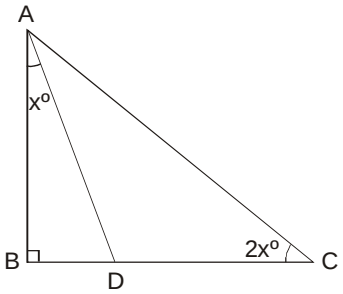
a) 61 u b) 62 u c) 64 u
d) 66 u e) 60 u

36. En el gráfico, AT = 5 u, BC = 10 u.
Si : AM = MC. Calcule TB.



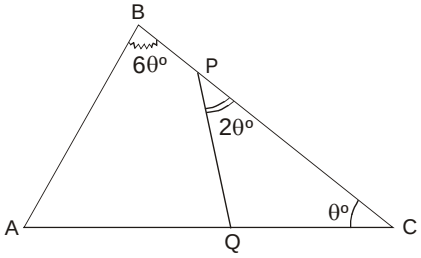
a) 11 u b) 12 u c) 13 u
d) 14 u e) 15 u

37. En el gráfico mostrado, AB = CD. Calcule : "xº".



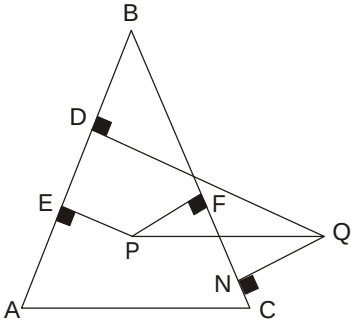
a) 9° b) 12° c) 18° 30'
d) 14° e) 21° 30'

38. En el gráfico, calcule : "θº" . AB = PQ y AQ = QC.



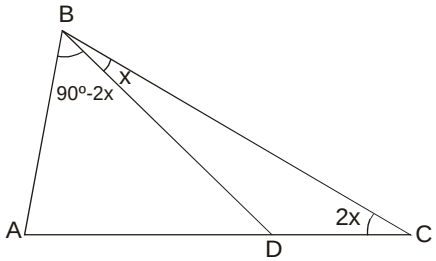
a) 10° b) 18° c) 20°
d) 30° e) 15°

39. En el gráfico, ABC es un triángulo isósceles (AB = BC). $\overline{PQ}$ // $\overline{AC}$; PE = 3u; PF = 5u y NQ = 7 u. Calcule QD.



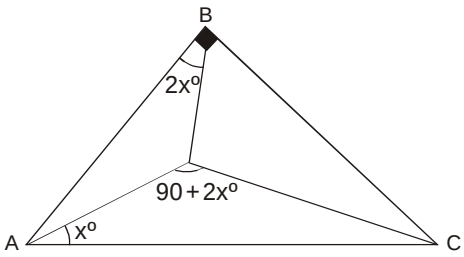
a) 12 u b) 13 u c) 14 u
d) 15 u e) 16 u

40. En el gráfico mostrado, AB = CD. Calcule "x".



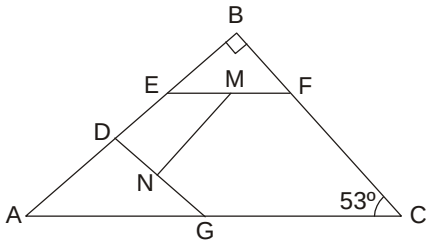
a) 8° b) 10° c) 12°
d) 15° e) 18°

41. En el gráfico, calcule : "xº". Si : AB = BC.



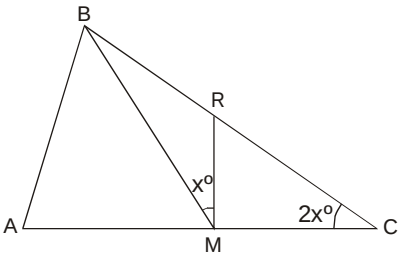
a) 22° 30' b) 20° 30' c) 18° 20'
d) 18° 30' e) 20° 18'

42. En el gráfico mostrado : DE = 18 u, FC = 24 u, GC = 16 u. Calcule MN, si : M y N puntos medios de $\overline{EF}$ y $\overline{DG}$, respectivamente.



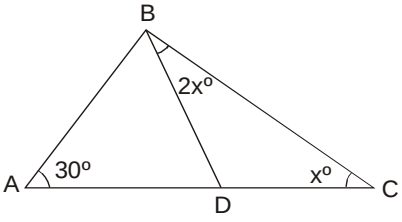
a) 16 u b) 15 u c) 12 u
d) 17 u e) 18 u

43. En el gráfico, calcule "xº".
Si : AB = BR = MC y AM = MC.



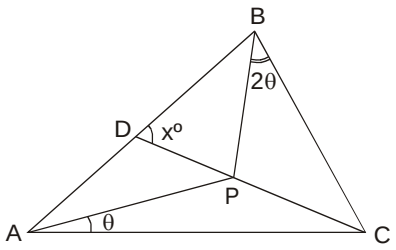
a) 5° b) 10° c) 12°
d) 15° e) 18°

44. En el gráfico, calcule "xº", si : AD = DC.



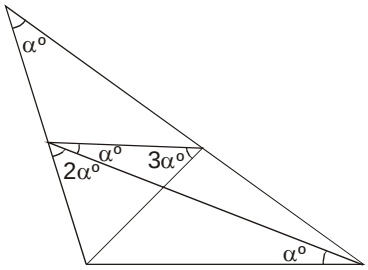
a) 30° b) 10° c) 15°
d) 18° e) 20°

45. En el gráfico, calcule "xº".
Si : BP = AC y AD = DP.



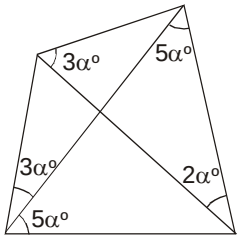
a) 90° b) 60° c) 45°
d) 120° e) 150°

46. En el gráfico, calcule "αº".



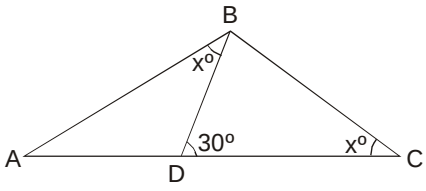
a) 8° b) 10° c) 15°
d) 18° e) 20°

47. En el gráfico, calcule "αº".



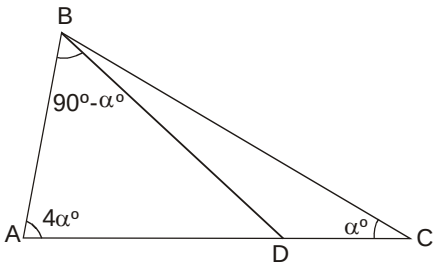
a) 9° b) 12° c) 10°
d) 15° e) 18°

48. En el gráfico, calcule "xº", si : AB = CD.



a) 9° b) 10° c) 12°
d) 15° e) 18°

49. En el gráfico mostrado, AB = CD.
Calcule "αº".

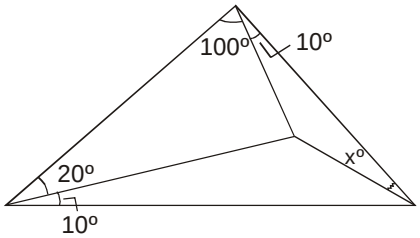


a) 10° b) 12° c) 15°
d) 20° e) 25°

50. En un triángulo ABC, se traza la ceviana $\overline{BF}$, si : AB = FC, m∢BAC = 30°, m∢FBC = 45°.
Calcule m∢BCA.

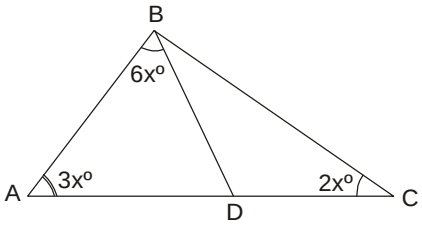
a) 12º b) 15º c) 20º
d) 30º e) 22º 30'

51. En el gráfico mostrado, calcule "xº".



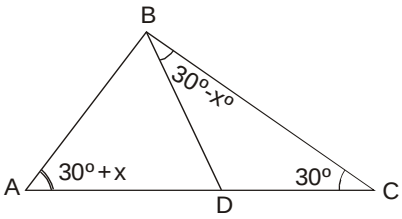
a) 5° b) 8° c) 10°
d) 12° e) 15°

52. En el gráfico, calcule "xº", si : AD = BC.



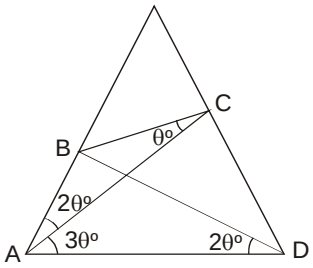
a) 10° b) 12° c) 20°
d) 15° e) 18°

53. En el gráfico, calcule "xº", si : AD = BC.



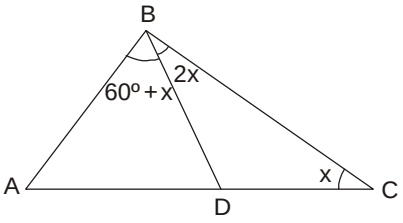
a) 12° b) 15° c) 10°
d) 18° e) 20°

54. En el gráfico : BC = AD, calcule "θ^o".



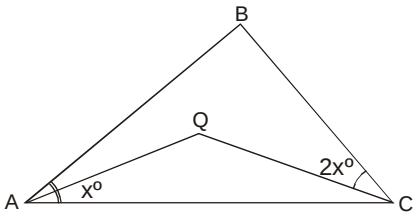
a) 10° b) 12° c) 15°
d) 18° e) 20°

55. En el gráfico, calcule "x", si : AB = DC.



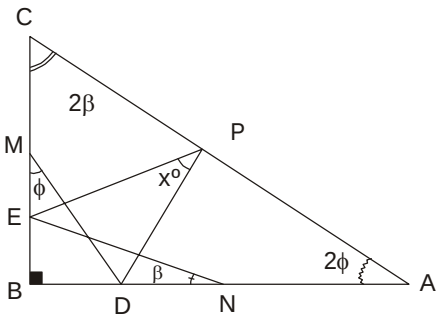
a) 10° b) 15° c) 20°
d) 45°/2 e) 15°/2

56. En el gráfico, calcule "x^o". Si : AQ = QC = BC.



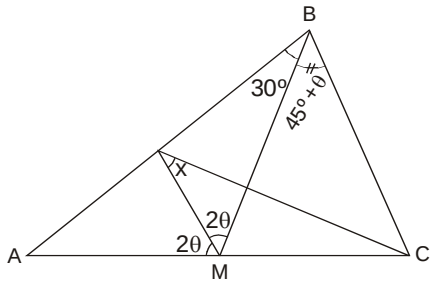
a) 10° b) 15° c) 18°
d) 30° e) 22° 30'

57. Si : M, N y P puntos medios de $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente. Calcule "x^o", si además : BE = 2u y BD = 4u.



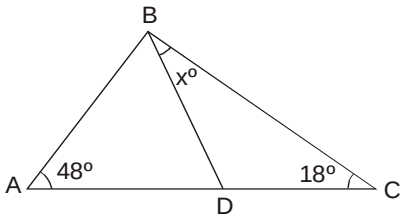
a) 30° b) 35° c) 31°
d) 36° e) 37°

58. Calcule "x^o", en función de : "θ". Si : AM = MC.



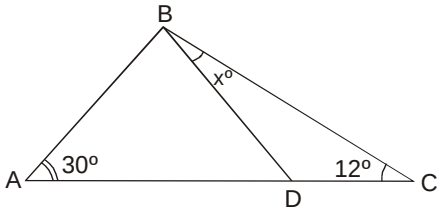
a) 2θ b) θ c) $\theta + 15°$
c) $\theta + 30°$ e) $60° + \theta$

59. En el gráfico, calcule "x^o", si : AB = DC.



a) 10° b) 12° c) 15°
d) 18° e) 20°

60. En el gráfico, calcule : "x^o", si : AD = BC.



a) 5° b) 6° c) 9°
d) 10° e) 12°

Claves

21.	a
22.	c
23.	b
24.	b
25.	d
26.	e
27.	c
28.	c
29.	b
30.	b
31.	d
32.	e
33.	e
34.	e
35.	e
36.	e
37.	c
38.	e
39.	d
40.	b

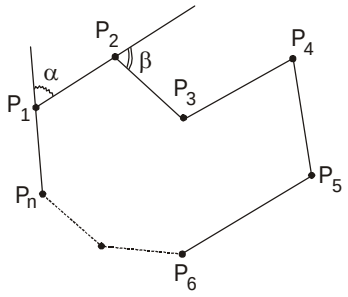
41.	a
42.	d
43.	b
44.	c
45.	b
46.	c
47.	c
48.	e
49.	d
50.	e
51.	c
52.	d
53.	b
54.	c
55.	d
56.	d
57.	c
58.	c
59.	b
60.	b

Capítulo

4 POLÍGONOS

Definición :

Sean P_1 , P_2 , P_3 , ... P_n una sucesión de "n" puntos distintos de un plano con $n \geq 3$. Los segmentos $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, $\overline{P_3P_4}$, ... $\overline{P_{n-1}P_n}$, $\overline{P_nP_1}$; son tales que ningún par de segmentos con un extremo común sean colineales y no exista un par de segmentos que se intersecten en puntos distintos de sus extremos. Entonces, la reunión de los "n" segmentos se denomina ***Polígono***.



Elementos :

1. ***Vértices*** : P_1 , P_2 , P_3 , ...
2. ***Lados*** : $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, ...
3. ***Ángulos*** :
   * ***Internos*** : $\measuredangle P_1$, $\measuredangle P_2$, ...
   * ***Externos*** : α, β .....
4. ***Diagonal*** : $\overline{P_3P_5}$, $\overline{P_4P_6}$, ...

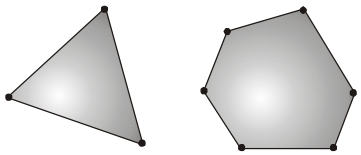
Los Polígonos se clasifican en :

1. ***Por el número de lados :***

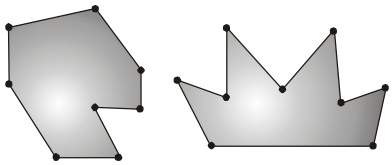
   * Triángulo $\rightarrow$ 3 lados
   * Cuadrilátero $\rightarrow$ 4 "
   * Pentágono $\rightarrow$ 5 "
   * Exágono $\rightarrow$ 6 "
     (o hexágono)
   * Heptágono $\rightarrow$ 7 "
   * Octógono $\rightarrow$ 8 "
   * Eneágono $\rightarrow$ 9 "
     o nonágono
   * Decágono $\rightarrow$ 10 "
   * Endecágono $\rightarrow$ 11 "
   * Dodecágono $\rightarrow$ 12 "
   * Pentadecágono $\rightarrow$ 15 "
   * Icoságono $\rightarrow$ 20 "

2. ***Por sus lados y ángulos***

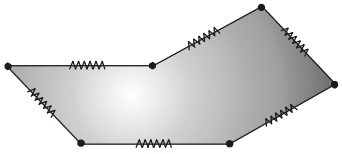
   * Polígono Convexo



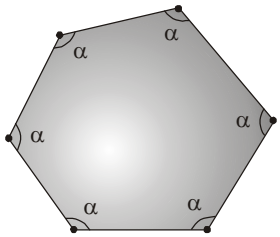
   * Polígono no Convexo



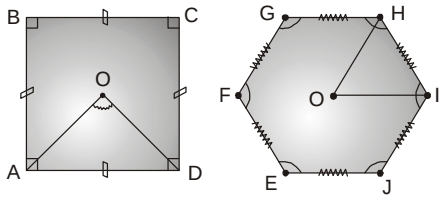
   * Polígono Equilátero



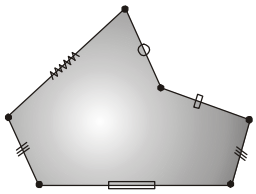
   * Polígono Equiángulo



* Polígono Regular

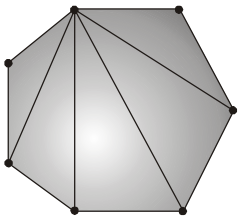


* Polígono Irregular



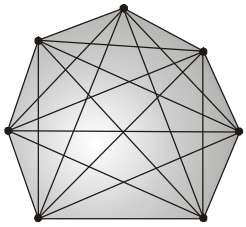
PROPIEDADES

I. Máximo número de diagonales trazadas desde 1 vértice.



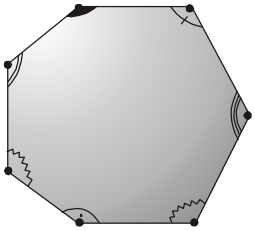
(n-3) diagonales

II. Número total de diagonales.



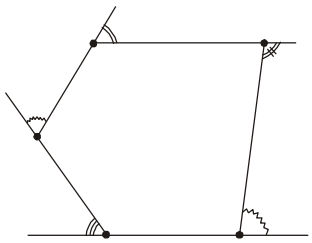
$$N_D = \frac{n(n-3)}{2}$$

III. En los polígonos convexos, la suma de las medidas de los ángulos internos es de :



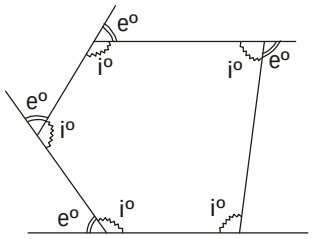
$$S_i = 180°(n-2)$$

IV. En todo polígono convexo, la suma de las medidas de los ángulos extenos es de 360°.



$$Sex = 360^o$$

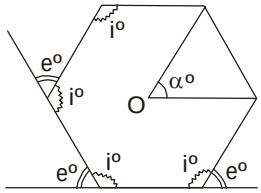
V. En el polígono equiángulo.



$$m\sphericalangle Exterior = \frac{360°}{n}$$

$$m\sphericalangle Interior = \frac{180°(n-2)}{n}$$

VI. En el polígono regular.



$\alpha°$: medida del ángulo central.

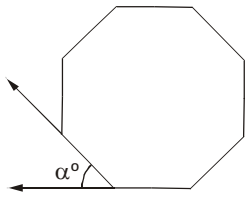
$Se = S_\alpha = 360°$

$$\alpha° = e° = \frac{360°}{n}$$

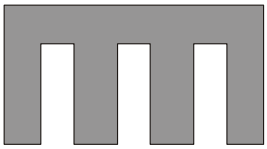
$$i° = 180° - \frac{(n-2)}{n}$$

Test de aprendizaje preliminar

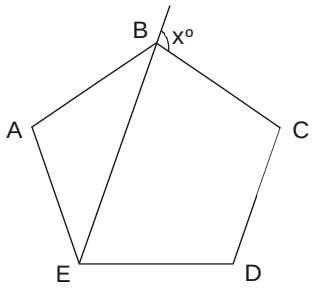
01. En el octógono regular, calcule "α^o".



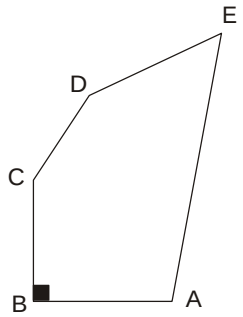
02. Calcule la suma de las medidas de los ángulos interiores en el gráfico.



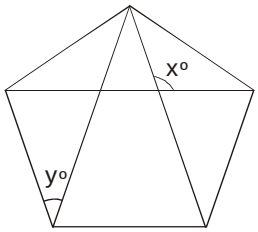
03. ABCDE es un polígono regular. Calcule "xº".



04. En el polígono mostrado :
AB = BC = CD = DE = a, $\overline{AC} \perp \overline{CD}$, $\overline{AD} \perp \overline{DE}$.
Calcule el perímetro del polígono mostrado.



05. El gráfico muestra un polígono regular.
Calcule : xº - yº.



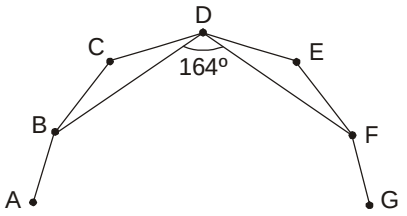
06. En un polígono, la suma de las medidas de sus ángulos internos es 540°, el número de lados de dicho polígono es :

07. En un polígono, la diferencia de la suma de los ángulos internos y la suma de ángulos externos es igual a 720°. Calcule el número de diagonales de dicho polígono.

08. En un polígono equiángulo, la relación entre las medidas de un ángulo interior y otro exterior es como 5 a 1.
Calcule el número de diagonales del polígono.

09. La medida del ángulo interior de un polígono regular es igual a la medida de su ángulo central. El polígono es un :

10. En el gráfico, se presenta parte de un polígono regular de "n" lados. Calcule "n".



Practiquemos :

11. Calcule el número de lados de un polígono convexo, si desde cuatro vértices consecutivos se puede trazar 45 diagonales.

12. En un hexágono ABCDEF :
BC = 4u, AB = 3u, CD = 6u, DE = 5u.
Calcule el perímetro del hexágono equiángulo mencionado.

13. Se tiene un octógono equiángulo ABCDEFGH en el cual :
AB = 2 m; BC = $\sqrt{2}$ m; CD = 3m. Calcule AD.

14. Cada lado de un polígono regular mide 6 cm y el perímetro equivale al número que expresa el total de diagonales en cm. Calcule la medida de un ángulo central.

15. Desde 7 vértices consecutivos de un polígono se han trazado 55 diagonales. Calcule el número de diagonales totales del polígono.

16. En un hexágono convexo ABCDEF :
$m\sphericalangle B = 140^o$, $m\sphericalangle E = 150^o$, $m\sphericalangle C + m\sphericalangle D = 330^o$.
Calcule la medida del ángulo que forman las rectas AB y FE al intersectarse.

17. En un polígono equiángulo ABCDEF ... las bisectrices de los ángulos ABC y DEF son perpendiculares. Calcule el número de diagonales de dicho polígono.

18. Si a un polígono se le incrementa el número de lados en 2, cada ángulo interno aumenta en 15°.
El polígono es :

19. Si el número de lados de un polígono regular aumenta en 10, su ángulo interior aumenta en 3°. Calcule el número de lados del polígono original.

20. En un polígono regular, se cumple que la suma de las medidas de un ángulo central, un ángulo exterior y un ángulo interior es 210°. Calcule el número total de diagonales.

Problemas propuestos

21. Calcule la suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono, sabiendo que si se aumenta en tres el número de lados, el número de diagonales aumenta en 27.

a) 1260° b) 1360° c) 1560°
d) 1460° e) 1600°

22. En un polígono regular la diferencia de un ángulo interno y un ángulo externo está comprendida entre 30° y 40°. Calcule el número de lados de dicho polígono.

a) 5 b) 6 c) 7
d) 8 e) 10

23. Se tiene un octágono regular ABC-DEFGH. Calcule la medida del ángulo formado por las diagonales $\overline{BE}$ y $\overline{CH}$.

a) 30° b) 45° c) 60°
d) 90° e) 120°

24. Si un polígono regular tiene "n" lados y se suman el valor de la suma de sus ángulos internos, externos y centrales se obtiene (200n)°. Calcule el número de diagonales que tiene dicho polígono.

a) 119 b) 152 c) 104
d) 135 e) 170

25. Los ángulos internos B, C y D de un polígono convexo miden 170°, 160° y 150° respectivamente. Calcule la medida del menor ángulo formado por los lados $\overline{AB}$ y $\overline{DE}$.

a) 50° b) 60° c) 70°
d) 80° e) 40°

26. ABCDE es un pentágono regular y BCPQ es un cuadrado interior al pentágono. Calcule la $m\sphericalangle DBP$.

a) 6° b) 8° c) 9°
d) 10° e) 12°

27. Calcular el número de lados de un polígono equiángulo ABCDEF ....., si las mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{EF}$ forman un ángulo cuya medida es 36°.

a) 10 b) 20 c) 30
d) 40 e) 50

28. Calcule el número de lados del polígono regular cuyo ángulo interno es (p+15) veces el ángulo exterior, y además se sabe que el número de diagonales es 135p.

a) 80 b) 85 c) 90
d) 95 e) 100

29. Dadas las siguientes proposiciones :
I. Cada ángulo interior de un hexágono regular mide 120°.
II. En el decágono, se pueden trazar 36 diagonales.
III. El polígono regular cuyos ángulos exteriores miden 36° es un decágono.

Son verdaderas :

a) Sólo I y III b) Sólo II
c) Sólo I y II d) Sólo III
e) Sólo II y III

30. Calcule el número de diagonales que se puede trazar en un polígono regular de vértices A_1, A_2, A_3, ... A_n, sabiendo que las mediatrices de A_1A_2 y A_3A_4 forman un ángulo que mide 30°.

a) 189 b) 230 c) 170
d) 275 e) 252

31. Dos números consecutivos, representan los números de vértices de dos polígonos convexos. Si la diferencia de los números de diagonales totales es 3. El polígono mayor es :

a) Icoságono b) Nonágono
c) Pentágono d) Eptágono
e) Endecágono

32. Se tiene un polígono regular cuyo semiperímetro es "p" y el número que expresa su número de diagonales es igual al perímetro.
Además su ángulo interior es "p" veces su ángulo exterior.
Calcule la longitud del lado del polígono regular.

a) 1/3 b) 1/5 c 1/4
d) 1 e) 1/2

33. El polígono, en el que su número de lados es igual a su número de diagonales es :

a) Pentágono b) Hexágono
c) Dodecágono e) Nonágono
e) Octógono

34. Si la suma de las medidas de los ángulos internos de dos polígonos convexos difieren en 720° y sus ángulos centrales difieren en 7,5°.
Indicar si el cociente mayor que la unidad de los lados de los dos polígonos convexos es igual a :

a) 1,53 b) 1,23 c) 1,13
d) 1,43 e) 1,33

35. Si a un polígono se le aumenta un lado, su número de diagonales aumenta en 6. Si se le disminuye un lado, el número de diagonales disminuye en :

a) 6 b) 3 c) 5
d) 2 e) 4

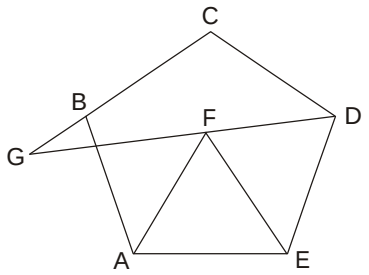
36. Si a un polígono se le aumenta 2 lados, el número de diagonales aumenta en 15. Calcule la mitad de la medida del ángulo externo de dicho polígono.

a) 45° b) 60° c) 40°
d) 120° e) 90°

37. En cierto sistema de medida, la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo $\frac{3}{4}$K. Calcule la suma de las medidas de los ángulos internos en un decágono convexo.

a) 6 K b) 5 K c) 7 K
d) 10 K e) 8 K

38. En el gráfico ABCDE y AFE son regulares, GD = 10u. Calcule la distancia de D a $\overleftrightarrow{GC}$.



a) 3 u b) 4 u c) 8 u
d) 6 u e) 5 u

39. Se inscribe un rectángulo en un cuadrado, tal que sus lados sean paralelos a las diagonales del cuadrado. Calcule la relación entre los perímetros del cuadrado y del rectángulo.

a) 2 b) 3 c) $\sqrt{2}$
d) $2\sqrt{2}$ e) 4

40. Calcule el número de lados de un polígono equiángulo ABCDEF .....; si las mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{EF}$ forman un ángulo de 36°.

a) 15 b) 10 c) 20
d) 40 e) 10 ó 40

41. En un polígono equiángulo desde (n-7) lados consecutivos se pueden trazar (n-1) diagonales medias. Calcule la medida de un ángulo interior.

a) 130° b) 132° c) 134°
d) 135° e) 140°

42. Calcule el número de polígonos equiángulos convexos existen de modo que la medida de su ángulo interno en grados sexagesimales está representado por un número entero.

a) 24 b) 22 c) 18
d) 30 e) 21

43. En un polígono convexo de "n" lados. Calcule la suma de las medidas de los ángulos formados al prolongar los lados del polígono.

a) 180°n b) 360°n c) 90°(n-2)
d) 180°(n-4) e) 360°(n-2)

44. El menor ángulo de un polígono mide 139°, y las medidas de los otros ángulos forman, con la del primero, una progresión aritmética de razón 2°. Calcule el número de lados del polígono.

a) 10 b) 9 c) 12
d) 15 e) 20

45. Calcule el mayor número de lados de un polígono equilátero ABCDEF ..... ; si las mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{EF}$ forman un ángulo cuya medida es 36°.

a) 10 b) 12 c) 30
d) 14 e) 15

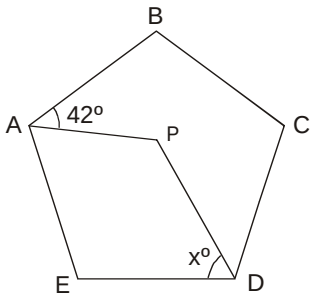
46. En un polígono convexo de "n" lados, desde (n-4) vértices consecutivos se trazan (4n+3) diagonales. Calcule la suma de las medidas de los ángulos interiores del polígono.

a) 1040° b) 1140° c) 1240°
d) 1340° e) 1800°

47. En un hexágono regular ABCDEF, cuyo perímetro es igual a 72u, se traza la bisectriz interior FM en el triángulo ABF y sobre $\overline{FD}$ se toma el punto Q, tal que: AF = FQ y $\overline{QM} \cap \overline{BF} = \{P\}$. Calcule PQ.

a) 4 u b) 8 u c) 10 u
d) 12 u e) 16 u

48. Calcule "xº", si ABCDE es un pentágono regular. (ED = DP).



a) 42° b) 45° c) 48°
d) 54° e) 60°

49. De uno de los vértices de un polígono convexo, se puede trazar (x - 3) diagonales, entonces la suma de las medidas de sus ángulos interiores equivale a ..... ángulos rectos.

a) 2x b) 2x - 4 c) x + 4
d) 2x + 8 e) x

50. En cierto polígono convexo, el menor ángulo interno mide 135° y los demás ángulos internos están en progresión aritmética de razón 3°. Calcule el número de lados.

a) 12 b) 13 c) 14
d) 15 e) 17

51. En el nonágono regular AB ... HI, las diagonales BD y CF miden "a" y "b" unidades respectivamente. Calcule la distancia del vértice E, a la diagonal BH.

a) $\frac{a+b}{2}$ b) b - a c) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

d) $\frac{b\sqrt{3}}{2}$ e) $\sqrt{ab}$

52. Las medidas de los ángulos interiores de un trapezoide forman una progresión aritmética. Si la medida del cuarto ángulo es nueve veces la del segundo, calcule la medida del tercer ángulo interior.

a) 81° b) 54° c) 71°
d) 27° e) 108°

53. ABCD es un cuadrilátero donde el ángulo A es recto, $m\sphericalangle B = m\sphericalangle C = 60°$ y $2AB - BC = 6\sqrt{3}$ u. Calcule CD.

a) $6\sqrt{3}$ u b) 6 u c) $2\sqrt{3}$ u
d) $3\sqrt{2}$ u e) 3 u

54. Al disminuir en 6° la medida de cada ángulo interno de un polígono regular, resulta otro polígono regular cuyo número de diagonales es los 3/5 del número de diagonales del polígono original. Calcule el número de lados del polígono original.

a) 9 b) 10 c) 12
d) 15 e) 20

55. En un pentágono ABCDE : $m\sphericalangle B = m\sphericalangle D = 90°$ y los ángulos restantes congruentes. Calcule la distancia del vértice A al lado $\overline{ED}$, si : BC = 4 cm y CD = 10 cm, $AB = 4\sqrt{3}$ cm.

a) 3 cm b) 7 cm c) 6 cm
d) 8 cm e) 5 cm

56. En un pentágono convexo ABCDE : AB = BC y CD = DE (CD > BC); si : BD = K y $m\sphericalangle B = m\sphericalangle D = 90°$. Calcule la distancia del punto medio de $\overline{AE}$ a $\overline{BD}$.

a) $\frac{K}{2}$ b) 2K c) $\frac{2K}{3}$

d) K e) $\frac{K}{3}$

57. Dado el polígono equiángulo PQRST ... tal que las prolongaciones de $\overline{PQ}$ y $\overline{TS}$ se cortan en A. Si el ángulo PAS es agudo, calcule el máximo número de lados del polígono.

a) 12 b) 13 c) 14
d) 10 e) 11

58. Los lados de un polígono regular de "n" lados, n > 4, se prolongan para formar una estrella. El número de grados en cada vértice de la estrella, es :

a) $\frac{360}{n}$ b) $\frac{(n-4)180}{n}$

c) $\frac{(n-2)180}{n}$ d) $180-\frac{90}{n}$

e) $\frac{180}{n}$

59. El número de diagonales de un polígono convexo excede en 16 a la diferencia entre el número de ángulos rectos a que equivale la suma de sus ángulos interiores y el número de vértices del polígono. El polígono es :

a) Octógono. b) Decágono.
c) Pentágono. d) Exágono.
e) N. A.

60. Si la medida de cada ángulo interior de un polígono regular de "n" lados se disminuye en 5°, su número de diagonales disminuye en (5n-3). Calcule "n".

a) 18 b) 24 c) 30
d) 36 e) 42

Claves

21.	a
22.	a
23.	d
24.	d
25.	b
26.	c
27.	d
28.	c
29.	a
30.	e
31.	c
32.	d
33.	a
34.	e
35.	c
36.	a
37.	a
38.	e
39.	c
40.	d

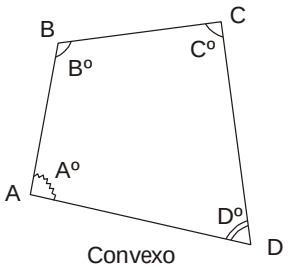
41.	d
42.	e
43.	d
44.	c
45.	a
46.	e
47.	d
48.	e
49.	b
50.	d
51.	d
52.	a
53.	a
54.	d
55.	c
56.	a
57.	e
58.	b
59.	a
60.	b

Capítulo

5 CUADRILÁTEROS

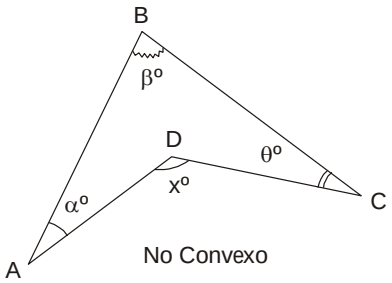
Definición :

Son aquellas figuras determinadas al trazar cuatro rectas secantes y coplanares, que se intersectan dos a dos. Los segmentos que se determinan son sus lados y los puntos de intersección son sus vértices.



Convexo

$A^o + B^o + C^o + D^o = 360^o$

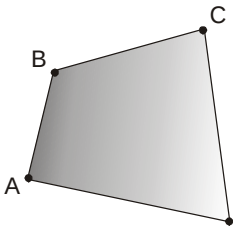


No Convexo

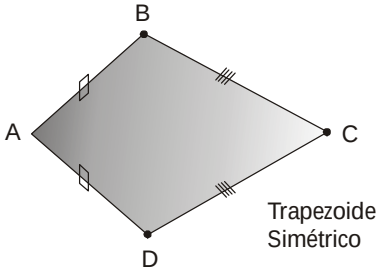
$x^o = \alpha^o + \beta^o + \theta^o$

Clasificación

I. ***Trapezoides***

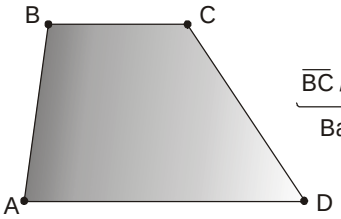


Trapezoide Asimétrico



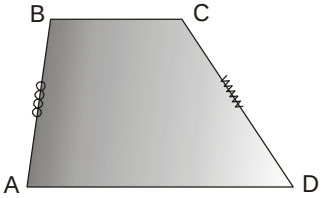
Trapezoide Simétrico

II. ***Trapecios***

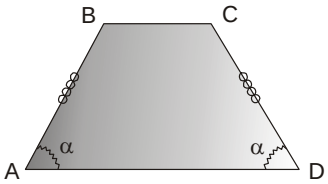


$\overline{BC} \,//\, \overline{AD}$

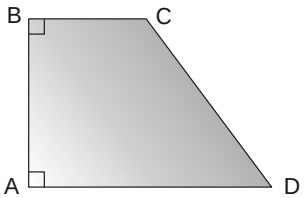
Bases



T. Escaleno

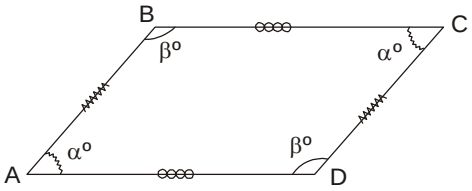


T. Isósceles



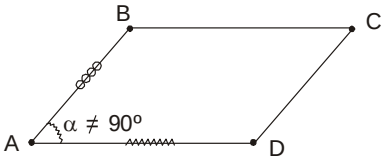
T. Rectángulo

III. ***Paralelogramos***

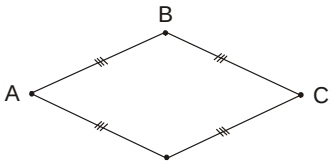


$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

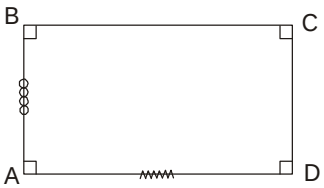
$\overline{BC} \parallel \overline{AD}$



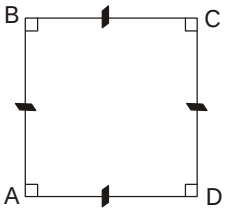
Romboide



Rombo



Rectángulo

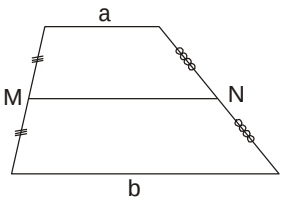


Cuadrado

Propiedades Básicas

I. ***En el Trapecio***

*

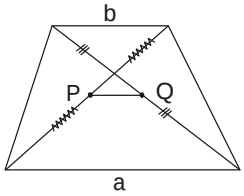


$\overline{MN}$: Base media

$\overline{MN} \parallel$ Bases

$$MN = \frac{a+b}{2}$$

*

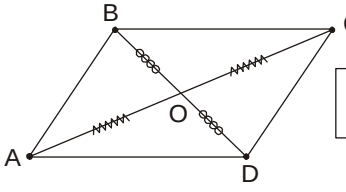


$\overline{PQ} \parallel$ Bases

$$PQ = \frac{a-b}{2}$$

II. ***En el Paralelogramo***

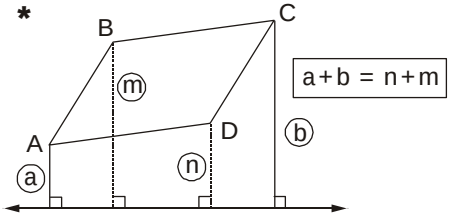
*



AO = OC

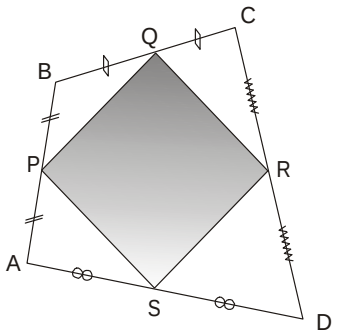
BO = OD

*



a + b = n + m

III. ***En todo Cuadrilátero***

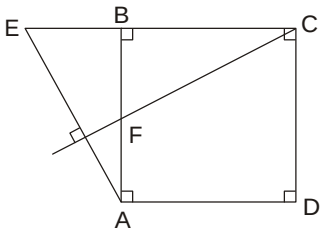


⟶ PQRS es un paralelogramo

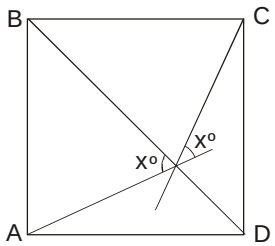
Test de aprendizaje preliminar

01. En la prolongación del lado $\overline{AD}$ de un rectángulo ABCD, se ubica el punto E, tal que :
m∢ADB = m∢DCE, BD = 4 u y CE = 3 u. Calcule AE.

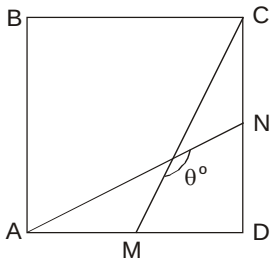
02. En el gráfico, calcule la m∢BEA, si : ABCD es un cuadrado y BF = 3(AF).



03. En el gráfico, calcule "xº", si ABCD es un cuadrado.



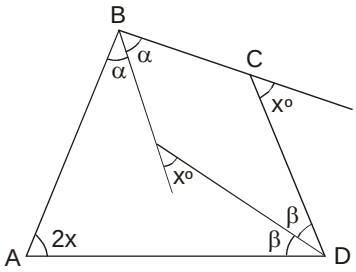
04. Calcule "θº" en el gráfico, si : ABCD es un cuadrado y "M" y "N" son puntos medios.



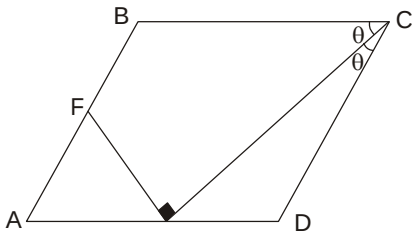
05. En un cuadrado ABCD, se prolonga $\overline{AD}$ hasta "P". Luego se traza la perpendicular $\overline{AQ}$ hacia $\overline{PC}$ que corta a $\overline{CD}$ en M. Calcule la m∢DPM.

06. Las diagonales de un rombo miden 20 dm y 48 dm. Calcule el perímetro del rombo.

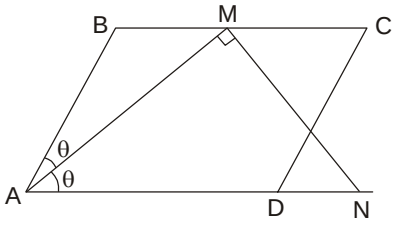
07. Del gráfico, calcule "xº".



08. En el gráfico, si : ABCD es un romboide, calcule BF, sabiendo que : BC = 7 u y CD = 5 u.

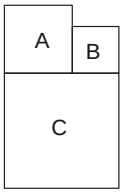


09. En el gráfico, si : ABCD es un romboide, AD = 8 u; AB = 5u. Calcule DN.



10. En el gráfico, se muestran los cuadrados A, B y C. Calcule:

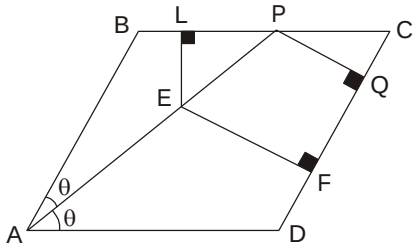
$$\frac{\text{Perímetro de A + Perímetro de B}}{\text{Perímetro de C}}$$



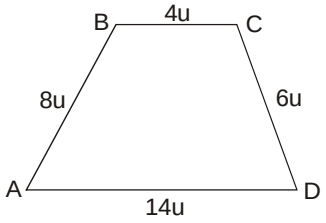
Practiquemos :

11. En los lados $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ del cuadrado ABCD, se ubican los puntos M y P, respectivamente, tal que : CP = PD y $m\sphericalangle APM = 90°$. Calcule la $m\sphericalangle AMB$.

12. En el gráfico, si : ABCD es un paralelogramo, PQ = 12u, EF = 17 u. Calcule : EL.



13. En el gráfico ABCD un trapecio $(\overline{BC} // \overline{AD})$. Calcule la $m\sphericalangle ADC$.

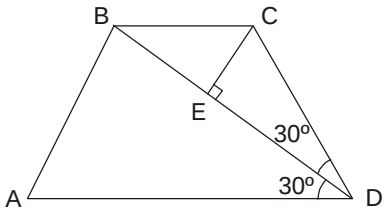


14. Las diagonales de un trapecio miden 12 cm y 18 cm. Calcule el máximo valor entero que puede tomar la longitud de la mediana de dicho trapecio.

15. En un trapecio rectángulo ABCD.
m∢A = m∢B = 90°, m∢D = 75° ; AD = 2(AB).
Calcule la medida del ángulo BCA.

16. Los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ de un trapecio ABCD son de igual longitud. Si $\overline{AD}$ es paralela a $\overline{BC}$ y tiene el doble de la longitud de $\overline{BC}$, la diagonal $\overline{AC}$ mide :

17. En el gráfico, si : $\overline{BC}$ // $\overline{AD}$ y ABCD, es un trapecio isósceles. Calcule : AD, EC = 5 m.



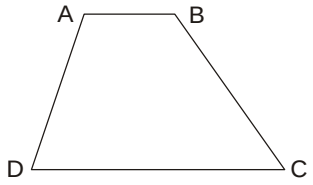
18. En un trapecio, la suma entre la mediana y el segmento que une los puntos medios de las diagonales es 32 cm. Calcule la longitud de la base mayor.

19. Las diagonales de un trapecio son perpendiculares y miden 6u y 8u. Calcule la longitud de la mediana.

20. La suma de las longitudes de las diagonales de un trapezoide es 20. Calcule el perímetro del cuadrilátero que resulta al unir consecutivamente los puntos medios de los lados del trapezoide.

Problemas propuestos

21. En el gráfico se muestra un trapecio ABCD, de bases $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, se trazan las bisectrices de los ángulos A y D que se cortan en R, y las bisectrices de los ángulos B y C que se cortan en S.
Calcule RS, si : AB = 4 u, CD = 12 u, AD = 7 u y BC = 9 u.

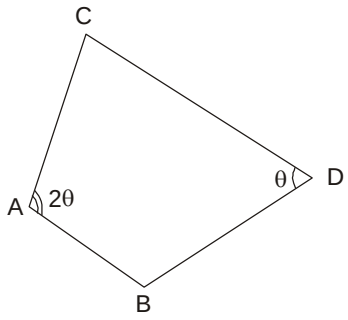


a) 0 b) 8 u c) 19/2 u
d) 13/2 u e) 3/2 u

22. En un cuadrilátero convexo ABCD, el ángulo m∢A = 9° y m∢B = 4°. Calcule la medida del ángulo formado por las bisectrices de los ángulos C y D.

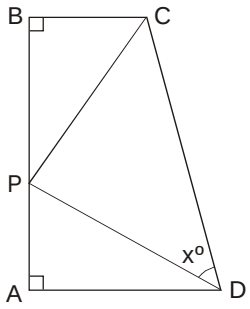
a) 6° 30' b) 7° 20' c) 7° 55'
d) 9° 00' e) 12° 00'

23. En el gráfico, los lados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son paralelos.
Si : AB = 5 u y AC = 12 u, calcule : CD.



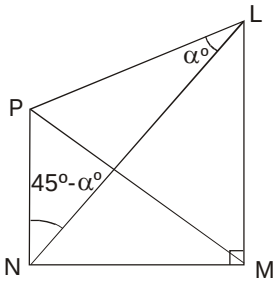
a) 15 u b) 16 u c) 18 u
d) 17 u e) 10 u

24. En el gráfico : BC = PA y AD = BP. Calcule "xº".



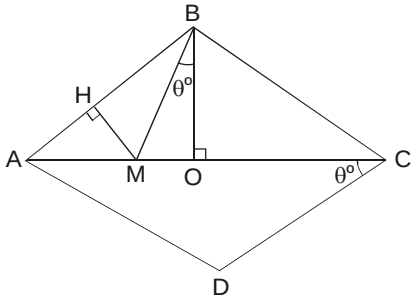
a) 53° b) 30° c) 60°
d) 45° e) 37°

25. En el gráfico, calcule "α^o". Si : PL = LM = NM.



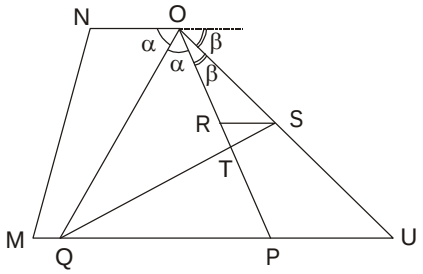
a) 20° b) 10° c) 12°
d) 30° e) 15°

26. En el gráfico, calcule "θ^o", si ABCD es un rombo. MH = 1 u, y D dista de $\overline{BC}$ 3 u.



a) 26° 30' b) 15° c) 18°
d) 30° e) 10°

27. En gráfico mostrado, MNOP es un trapecio, si : S punto medio de $\overline{OU}$ y $\overline{RS} // \overline{QU}$. Siendo : QU = 12 m, calcule TR.

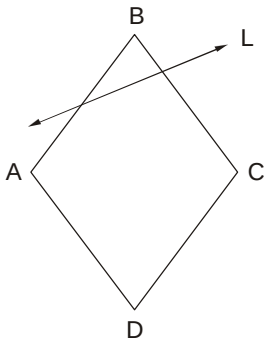


a) 1 m b) 1,5 m c) 2 m
d) 3 m e) 4 m

28. En un trapecio ABCD, la base menor $\overline{AB}$ es igual a la altura $\overline{AH}$; si :
m$\sphericalangle$ A = 135° y el $\sphericalangle$ B = 150°. Calcule el perímetro del trapecio, si : AB = AH = 20 cm.

a) 195,920 cm b) 200 cm
c) 182,920 cm d) 162,920 cm
e) 170,500 cm

29. En el gráfico, se muestra un romboide ABCD. Si las distancias de B, A y D a la recta son 2,4m; 3,6m; 7,9m, respectivamente, calcule la distancia de C a la recta L.



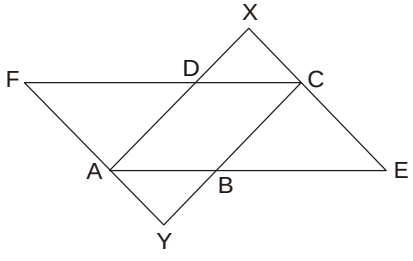
a) 1 m b) 1,5 m c) 1,9 m
d) 2 m e) 2,5 m

30. Dado un cuadrado, al unir los puntos medios de sus lados se obtiene otro cuadrado. Si se efectúa este procedimiento cuatro veces más se tendrá un cuadrado. Calcule la razón entre las longitudes de los lados del cuadrado inicial y el último que se obtuvo.

a) $\sqrt{2}$ b) $4\sqrt{2}$ c) $2\sqrt{2}$
d) $5\sqrt{2}$ e) $3\sqrt{2}$

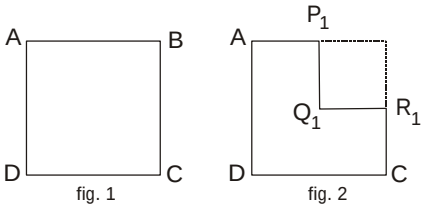
31. En el gráfico ABCD, es un paralelogramo y DX = BY. Si el perímetro del triángulo BCE es : a + 2b, el perímetro del triángulo CDX es : b-2a, y el perímetro del triángulo CFY es p.

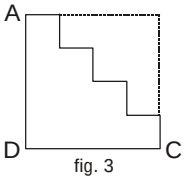
Calcule : $p^2 + 6ab$.



a) $a^2 + b^2$ b) $3a^2 + 2b^2$
c) $2a^2 + 3b^2$ d) $a^2 + 9b^2$
e) $9a^2 + b^2$

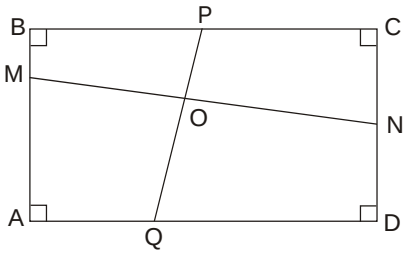
32. El gráfico 1 es un cuadrado de lado 4m, tomando los puntos medios de los lados AB y BC se construye el gráfico 2. En el segundo paso, tomando los puntos medios de los segmentos $\overline{AP_1}$, $\overline{P_1Q_1}$, $\overline{Q_1R_1}$ y $\overline{R_1C}$ se construye el gráfico 3. Si se efectúa este procedimiento 10 veces, calcule la longitud de la "escalera" que se obtiene.





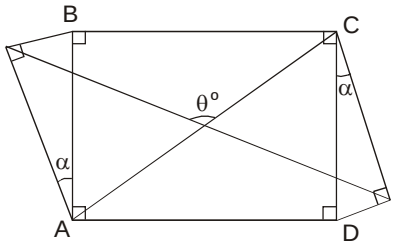
a) $4\sqrt{2}$ m b) $10\sqrt{2}$ m c) $40\sqrt{2}$ m
d) $4\sqrt{10}$ m e) 8 m

33. En el gráfico mostrado, se tiene un rectángulo ABCD, en el cual : AD = 2(CD), y donde : $m\sphericalangle OMA = m\sphericalangle BPO$. Si : $\overline{MN}$ y $\overline{PQ}$ se intersectan en O, de modo que : PO = 2 cm, QO = 4 cm y MO = 5 cm, calcule NO.



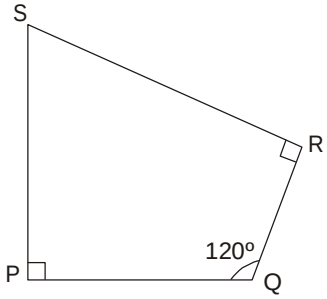
a) 8 cm b) 10 cm c) 7 cm
d) 9 cm e) 6 cm

34. En el gráfico :
ABCD es un cuadrado, y α = 20°. Calcule : "θ^o" .



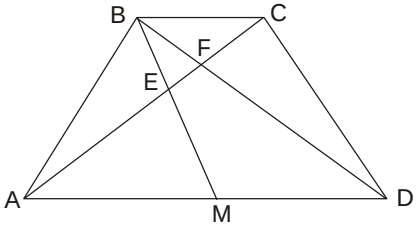
a) 120° b) 105° c) 115°
d) 100° e) 110°

35. En el gráfico, PQ = $12\sqrt{3}$ u y QR = $8\sqrt{3}$ u, calcule : PS + RS.



a) 60 u b) 63 u c) 64 u
d) 65 u e) 66 u

36. En el gráfico, ABCD es un trapecio $\overline{BM} // \overline{CD}$; AF = 18 cm y FC = 12 cm. Calcule EF.



a) 6 cm b) 4 cm c) 10 cm
d) 8 cm e) 5 cm

37. En un trapecio ABCD, la base mayor es $\overline{AD}$. Al trazarse las bisectrices del ángulo B y el ángulo exterior C, intersectan a la base $\overline{AD}$ y a su prolongación en P y Q respectivamente.
Si : AB + BC = 24 m y CD + AD = 30 m,
calcule la longitud del segmento que une los puntos medios de $\overline{PC}$ y $\overline{BQ}$.

a) 1 m b) 2 m c) 3 m
d) 4 m e) 5 m

38. Se tiene un paralelogramo ABCD. Se construyen exteriormente los triángulos equiláteros ABM y BCN. Por M se traza la perpendicular $\overline{MH}$ a $\overline{ND}$, calcule la medida del ángulo HMB, si el ángulo NDC mide 46°.

a) 16° b) 14° c) 18°
d) 11° e) 20°

39. En un trapecio ABCD ($\overline{AB} // \overline{CD}$) . Si :
AB = 8m; BC = 6m; AD = 10m y CD = 18m; las bisectrices de los ángulos A y D se intersectan en el punto M y las bisectrices de los ángulos B y C se intersectan en el punto N. Calcule MN.

a) 4 m b) 5 m c) 6 m
d) 4,5 m e) 5,5 m

40. De las siguientes proposiciones, las verdaderas (V) o falsas (F) son :

I. Si el trapecio tiene sus diagonales congruentes; entonces, es necesariamente inscriptible a una circunferencia.
II. En un trapecio escaleno, una diagonal puede ser también altura.
III. Si un polígono equiángulo está escrito en una circunferencia es necesariamente un polígono regular.

a) VVF b) FVF c) VFV
d) FFF e) VVV

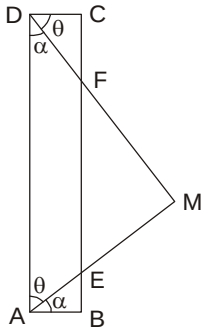
41. En un romboide ABCD, con AB < BC, se trazan las bisectrices interiores de sus cuatro ángulos. Dichas bisectrices al intersectarse, forman un :

a) Rombo.
b) Cuadrado.
c) Rectángulo.
d) Trapecio.
e) Otros cuadriláteros.

42. En un rombo ABCD, M es punto medio de $\overline{CD}$ y la diagonal $\overline{BD}$ corta a $\overline{AM}$ en punto R. Si : RM = 5u y $m\sphericalangle DRM = 53°$, calcule BD.

a) 18 u b) 35 u c) 30 u
d) 36 u e) 40 u

43. En el rectángulo ABCD de la figura, la longitud de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{FC}$ son respectivamente 2 m y 4 m. Si los segmentos $\overline{AE}$ y $\overline{EM}$ son iguales, calcule el perímetro del rectángulo.



a) 48 b) 30 c) 36
d) 24 e) 28

44. En un trapecio rectángulo ABCD, recto en A y D; la base menor $\overline{AB}$ mide 4 y la mediana $\overline{ME}$ del trapecio mide 6 (M en $\overline{AD}$) se ubica sobre $\overline{AD}$ el punto P, tal que :
PB = PC y $m\sphericalangle BPC = 90°$. Calcule MP.

a) 1 b) 1,5 c) 2
d) 2,5 e) 3

45. En un cuadrado ABCD, sobre la recta AD, se ubican los puntos P y Q, tal que : P, A, D y Q están en ese orden. Calcule la medida del ángulo formado entre $\overline{PC}$ y $\overline{BQ}$, siendo el punto medio de $\overline{AD}$ punto medio de $\overline{PQ}$ y $m\sphericalangle PCQ = 90°$.

a) 75° b) 60° c) 63,5°
d) 52,5° e) 67,5°

46. En un cuadrilátero ABCD :
$m\sphericalangle B = m\sphericalangle D = 90°$, $m\sphericalangle BCD = 45°$, luego se trazan $\overline{AP} \perp \overline{BD}$, $\overline{CQ} \perp \overline{BD}$. Calcule BD, si :
AP = 4 m, CQ = 20 m.

a) 16 m b) 24 m c) 30 m
d) 40 m e) 50 m

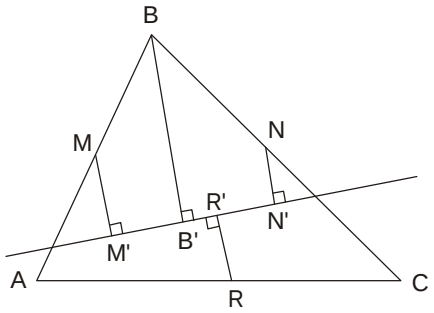
47. Es un cuadrado ABCD, por D se traza una recta que interseca en N a $\overline{AB}$. Si la proyección ortogonal de A y C sobre dicha recta son los puntos P y Q respectivamente, calcule la razón entre PQ y la distancia del centro del cuadrado a dicha recta.

a) 1 b) 1/2 c) 3
d) 2 e) $\sqrt{2}$

48. En un trapecio isósceles ABCD ($\overline{BC} // \overline{AD}$ y BC < AD); se construyen exteriormente los triángulos equiláteros CED y ADF; además:
$\overline{AE}$ y $\overline{BF}$ se intersectan en O. Calcue BO, si: AO = 3u; OE = 4u y OF = 5u.

a) 1 u b) 2,5 u c) 2 u
d) 3,5 u e) 4 u

49. En el gráfico, los puntos M, N y R son puntos medios de los lados AB, BC y CA.
Si : MM' + RR' + NN' = 25 u, calcule : BB'.



a) 20 u b) 22 u c) 23 u
d) 24 u e) 25 u

50. En un paralelogramo ABCD, se tiene que (AB < BC) y BD = 6u. Se construye exteriormente al triángulo equilátero AMD; en cuyo interior se ubica el punto F, tal que el triángulo AFB es equilátero. Calcule la longitud del segmento que une los puntos medios de $\overline{FB}$ y $\overline{MD}$.

a) $\sqrt{3}$ u b) $3\sqrt{3}$ u c) 3 u
d) $\sqrt{6}$ u e) $2\sqrt{6}$ u

51. Dado un cuadrado ABCD; se ubica M punto medio de $\overline{CD}$ y se traza $\overline{CN} \perp \overline{BM}$ ($N \in \overline{AD}$). Calcule : BN/QM; si : Q es la intersección de $\overline{NC}$ con $\overline{BM}$.

a) 1 b) 2 c) 3
d) 5 e) 4

52. En un trapecio MNOP ($\overline{MN} // \overline{OP}$); NO = 4u, OP = 6u, $m\sphericalangle M = 30°$ y $m\sphericalangle O = 120°$.
Calcule MN.

a) 10 u b) 12 u c) 14 u
d) 7 u e) 9 u

53. En un trapezoide MNOP :
$m\sphericalangle M = m\sphericalangle O = 90°$. Se trazan $\overline{NR}$ y $\overline{PL}$ perpendiculares a $\overline{MO}$. Si PL - NR = 3(MO).
Calcule la $m\sphericalangle MPO$.

a) 10° b) 12° c) 18,5°
d) 22,5° e) 30°

54. En el lado $\overline{CD}$ de un cuadrado ABCD, se ubica el punto P, tal que :
$m\sphericalangle BAP = 75°$.
Calcule la $m\sphericalangle BQC$, siendo Q punto medio de $\overline{AP}$.

a) 53° b) 45° c) 75°
d) 60° e) 90°

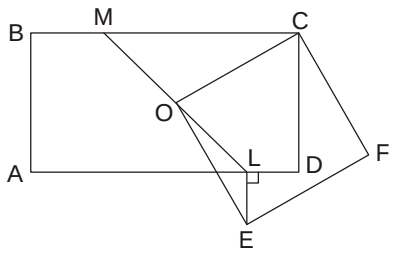
55. En un trapecio ABCD ($\overline{BC} // \overline{AD}$); se sabe que :
AD - BC = 2(AB) y $m\sphericalangle ABC = 4m\sphericalangle ADC$.
Calcule la $m\sphericalangle BCD$.

a) 160° b) 127° c) 143°
d) 150° e) 135°

56. En un paralelogramo ABCD, se ubica el punto "F" en $\overline{AD}$, de modo que :
$m\sphericalangle ABF = m\sphericalangle BCF$; FC = 2DC. Calcule la longitud del segmento que tiene por extremos los puntos medios de $\overline{BF}$ y $\overline{FC}$, si : BF = 12u.

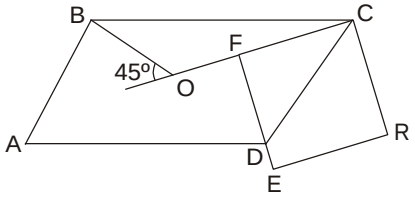
a) 4 u b) 8 u c) 9 u
d) 12 u e) 6 u

57. En el gráfico, ABCD es un rectángulo.
(O : intersección de las diagonales).
OCFE : es un cuadrado. Si : MB = a. Calcule EL.



a) a b) $\frac{a}{2}$ c) $\frac{3a}{2}$
d) $\frac{2a}{3}$ e) $\frac{4a}{3}$

58. En el gráfico, ABCD y EFCR son un paralelogramo y un cuadrado, $BO = \sqrt{2}$ u, DE = 1u.
(O : intersección de las diagonales del paralelogramo).
Calcule la $m\sphericalangle FCD$.

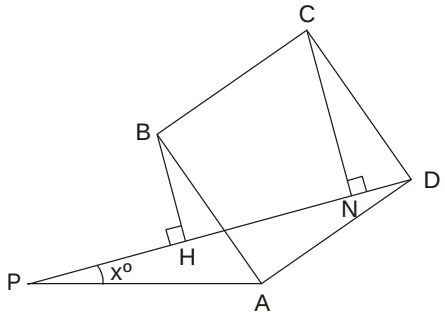


a) 53°/2 b) 60° c) 37°
d) 30° e) 37°/2

59. Se tiene un paralelogramo ABCD, por C se traza la perpendicular a $\overline{CD}$, la cual intersecta en E a la prolongación de $\overline{AD}$. Si:
AD = 8 u y $m\sphericalangle CBD = 2(m\sphericalangle CED)$, calcule ED.

a) 16 u b) 8 u c) $2\sqrt{2}$ u
d) $4\sqrt{2}$ u e) 32 u

60. Del gráfico mostrado, ABCD es un cuadrado.
Si : BH = 2 u, ND = 3 u y NP = 11u.
Calcule "xº".



a) 16° b) 30° c) 37°/2
d) 26°30' e) 15°

Claves

21.	c
22.	a
23.	d
24.	d
25.	c
26.	d
27.	a
28.	d
29.	c
30.	b
31.	d
32.	e
33.	c
34.	e
35.	a
36.	d
37.	c
38.	a
39.	b
40.	c

41.	c
42.	d
43.	d
44.	c
45.	c
46.	a
47.	d
48.	c
49.	e
50.	b
51.	d
52.	c
53.	c
54.	d
55.	d
56.	d
57.	a
58.	a
59.	a
60.	c

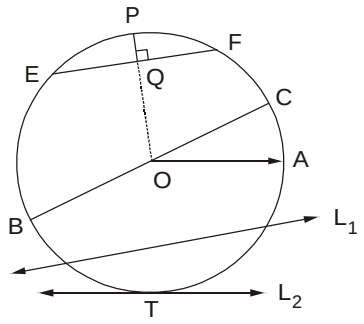
Capítulo

6 CIRCUNFERENCIA

Definición :

Es el lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de otro punto de su plano denominado centro. La distancia mencionada recibe el nombre de radio.

Elementos de la Circunferencia



* Centro : O
* Radio : $\overline{OB}$
* Diámetro : $\overline{BC}$
* Cuerda : $\overline{EF}$
* Arco : $\overset{\frown}{EB}$
* Flecha o sagita : $\overline{PQ}$
* Secante : L_1
* Tangente : L_2
* Punto de Tangencia : T
* Perímetro : L = Longitud de la circunferencia.

$$L = 2\pi r$$

$r \rightarrow$ radio

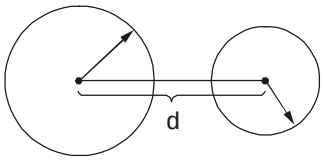
$\pi \rightarrow$ phi

$$\pi = \frac{L}{2r}$$

π = 3,1415926 .....

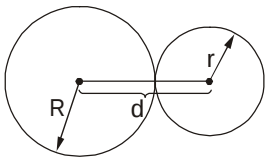
Posiciones relativas de dos Circunferencias Coplanares

* ***Circunferencias Exteriores***



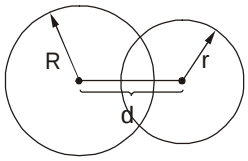
$$d > R + r$$

* ***Circunferencias Tangentes Exteriores***



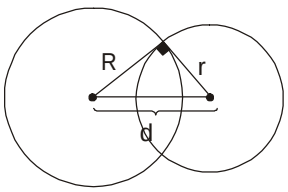
$$d = R + r$$

* ***Circunferencias Secantes***



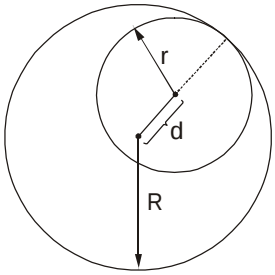
$$R - r < d < R + r$$

* ***Circunferencias Ortogonales***



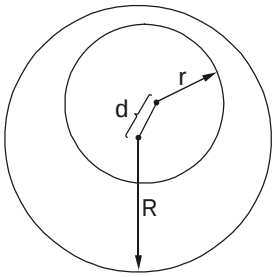
$$d^2 = R^2 + r^2$$

* ***Circunferencias Tangentes Interiores***



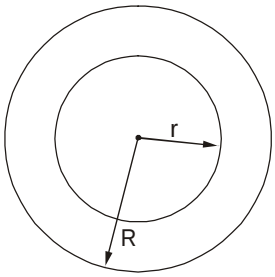
$d < R - r$

* ***Circunferencias Interiores***

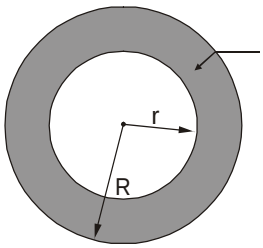


$d < R - r$

* ***Circunferencias Concéntricas***



d = cero

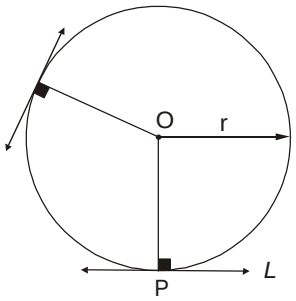


Esta región se denomina corona o anillo circular.

Observación : "d" $\rightarrow$ distancia entre los centros.

Propiedades Fundamentales

1.

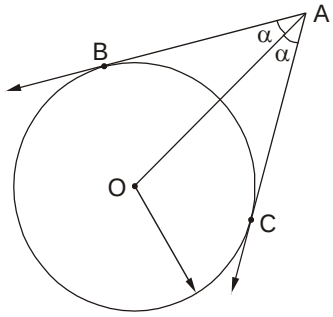


* P $\rightarrow$ punto de tangencia

* $\overline{OP} \perp \vec{L}$

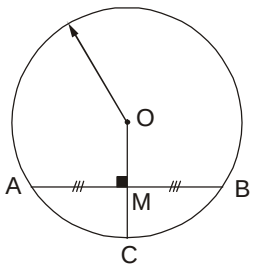
$\Rightarrow OP = r$

2.



AB = AC

3.

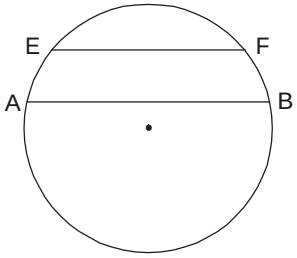


Si : $\overline{OC} \perp \overline{AB}$

$\Rightarrow$ $\overline{AM} \cong \overline{MB}$

$\overline{AC} \cong \overline{CB}$

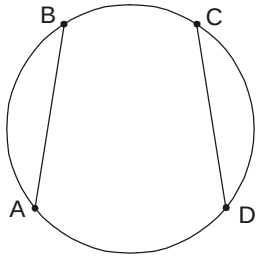
4.



Si : $\overline{EF} // \overline{AB}$

$\Rightarrow$ $\overset{\frown}{AE} \cong \overset{\frown}{FB}$

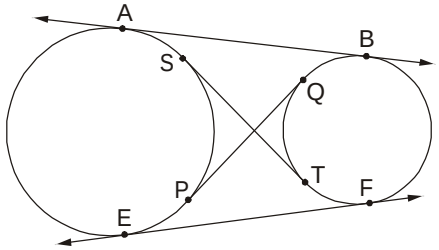
5.



Si : $\overline{AB} \cong \overline{DC}$

$\Rightarrow \overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{CD}$

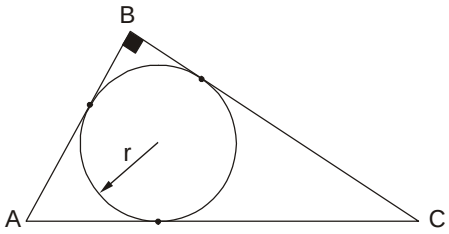
6.



$\overline{AB} \cong \overline{EF}$ y

$\overline{ST} \cong \overline{PQ}$

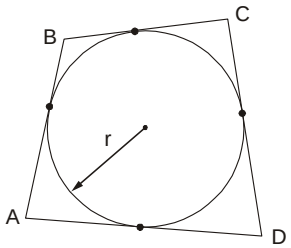
Teorema de Poncelet



r : inradio

$AB + BC = AC + 2r$

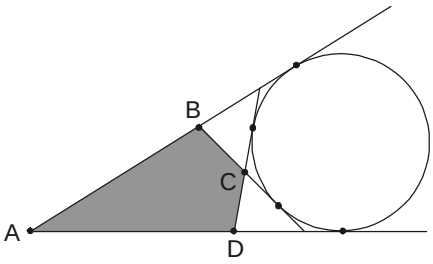
Teorema de Pitot



$AB + CD = BC + AD$

* Este teorema es válido para todo polígono circunscrito cuyo número de lados es un número par.

Teorema de Steiner



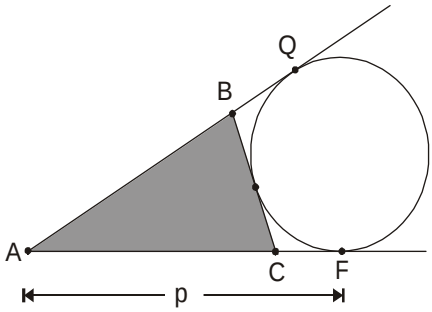
$AB - CD = AD - BC$

Observaciones

* Q y F $\rightarrow$ puntos de tangencia
p $\rightarrow$ semi-perímetro del triángulo ABC.

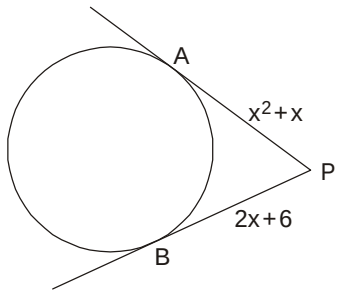
$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

$\Rightarrow \boxed{AQ = AF = p}$

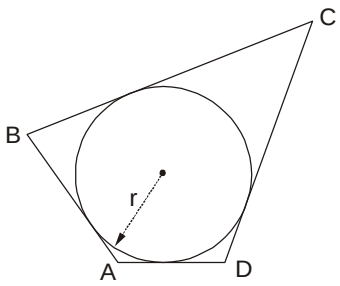


Test de aprendizaje preliminar

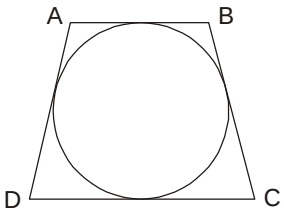
01. En el gráfico, calcule PA, si : A y B son puntos de tangencia.



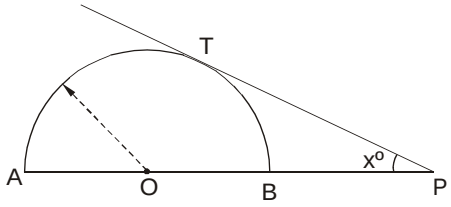
02. En el gráfico : AB = 7 cm, CD = 7,5 cm y AD = 4 cm. Calcule BC.



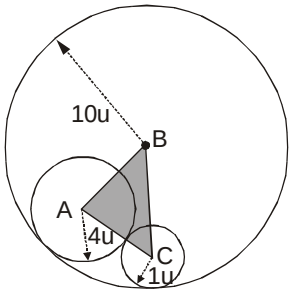
03. En el trapecio isósceles : AD = BC = 8 cm. Calcule la longitud de la mediana del trapecio. $(\overline{AB} // \overline{DC})$.



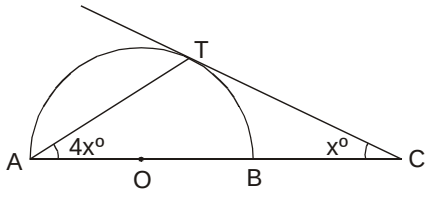
04. Calcule "xº", si "T" es punto de tangencia. AO = OB = BP = 1 u.



05. Calcule el perímetro del triángulo ABC.

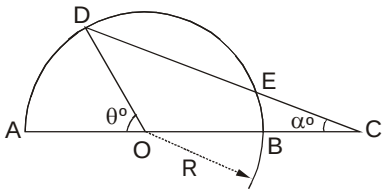


06. Calcule "xº", si "O" es centro. (T : punto de tangencia).



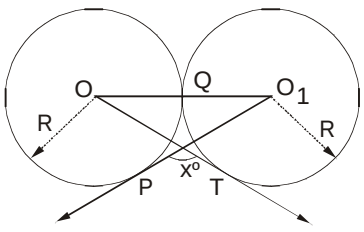
07. La distancia entre los centros de dos circunferencias coplanares es 5 cm. Si sus radios miden 2,5 cm y 1,5 cm, las circunferencias son :

08. Si : AO = EC. Calcule : "θ^o" .



09. Dado el romboide ABCD donde: $m\sphericalangle A = 64°$, los centros de las circunferencias inscritas a los triángulos ABD y BCD son O y O_1 respectivamente. Calcule la $m\sphericalangle ODO_1$.

10. Siendo : P, Q y T puntos de tangencia. Calcule "xº".



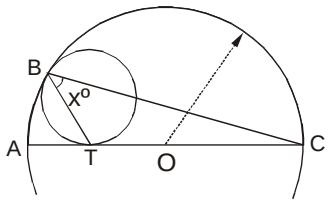
Practiquemos :

11. Una circunferencia está inscrita en un trapecio isósceles ABCD ($\overline{BC} // \overline{AD}$).
Si : AB = 12 cm. Calcule la longitud de la mediana de dicho trapecio.

12. ¿En qué relación están las longitudes de los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita a un triángulo equilátero?

13. En una circunferencia de centro "O", se ubica la cuerda $\overline{BC}$ de 80 u de longitud. Si el radio de la circunferencia mide 41 u, calcule la distancia de "O" hacia la cuerda.

14. En el gráfico, calcule : x°.
(B y T son puntos de tangencia).



15. En un triángulo ABC, se sabe que :
AB = 8 u, BC = 10 u y $\overline{AC}$ = 12 u, la circunferencia inscrita determina sobre $\overline{AC}$ el punto "M".
Calcule AM.

16. El punto de tangencia de la circunferencia inscrita en un trapecio rectángulo divide al mayor de los lados no paralelos en segmentos que miden 1 u y 9 u. Calcule la longitud de la mediana del trapecio.

17. En un triángulo ABC acutángulo, la circunferencia inscrita es tangente a $\overline{AB}$ en N y la circunferencia exinscrita relativa a $\overline{AC}$ es tangente a la prolongación de $\overline{BA}$ en M.
Cacule AC. Si : AN = 3,5 u y AM = 4,5 u.

18. Se tiene un octógono ABCDEFGH circunscrito a una circunferencia, donde :
AB = 1 u, BC = 1 u, CD = 1,5 u; DE = 0,5 u; EF = 2u, FG = 2,7 u; HA = 0,8 u.
Calcule GH.

19. Marcar verdadero (V) o falso (F), en las siguientes proposiciones :

I. La recta que contiene los centros de dos circunferencias secantes es perpendicular a la recta que contiene los puntos comunes a las dos circunferencias.
II. El ángulo central de una circunferencia mide 0° (cero grados).
III. La mediatriz de toda cuerda contiene al centro del círculo.
IV. Ángulo inscrito es aquel cuyo vértice está sobre la circunferencia.

20. Las longitudes de dos circunferencias coplanares están en relación de 7 a 3 y su suma es igual a 20π. Si la distancia entre sus centros es dos veces la diferencia de las longitudes de sus radios, podemos decir que las circunferencias son :

Problemas propuestos

21. Los diámetros de dos circunferencias situadas en el mismo plano miden 14 m y 6 m. Si la distancia entre sus centros es 10m. Las circunferencias son :

a) Exteriores. b) Interiores.
c) Tangentes. d) Secantes.
e) Concéntricas.

22. La prolongación de $\overline{CA}$ de un triángulo ABC intersecta a la circunferencia exinscrita relativa a $\overline{AB}$ en el punto P. Siendo :
CP = 20 u, calcule el perímetro de la región triangular ABC.

a) 20 u b) 40 u c) 30 u
d) 60 u e) 50 u

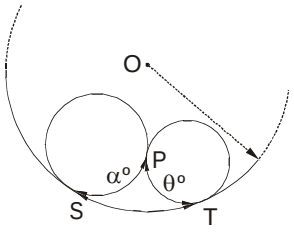
23. Calcule la longitud del lado del triángulo equilátero inscrito en una circunferencia de 8 cm de diámetro.

a) $4\sqrt{3}$ cm b) $8\sqrt{3}$ cm c) $2\sqrt{3}$ cm
d) $8\sqrt{2}$ cm e) 8 cm

24. Si el radio de la circunferencia se aumenta en 1 u, calcule la razón de la longitud de la nueva circunferencia al diámetro es :

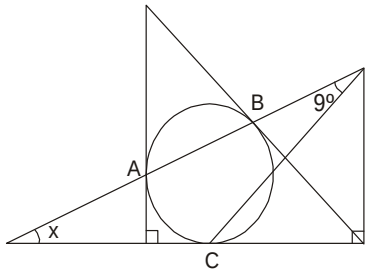
a) π b) $\frac{2\pi+1}{2}$ c) $\frac{2\pi-1}{2}$
d) $\pi-2$ e) $2\pi-1$

25. Calcule la medida del arco ST, si :
$\alpha^o+\theta^o=257°$, si : S, P y T son puntos de tangencia.



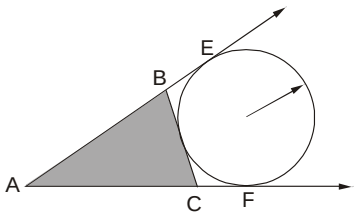
a) 77° b) 80° c) 103°
d) 75° e) 90°

26. En el gráfico : A, B y C son puntos de tangencia.
Calcule : "x°".



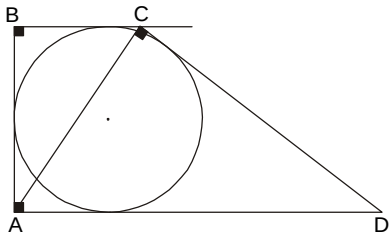
a) 20° b) 27° c) 36°
d) 54° e) 60°

27. En el gráfico mostrado : AB = 12 dm, BC = 8 dm y AC = 10 dm. Calcule : $(\frac{EB}{FC})$.



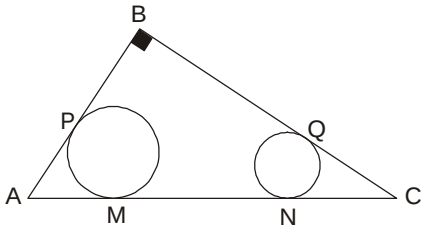
a) 4/3 b) 5/3 c) 3/5
d) 2/3 e) 4/7

28. Caclule BC. Si los inradios de los triángulos rectángulos ABC y ACD miden r_1 y r_2.



a) $\sqrt{r_1^2+r_2^2}$ d) $\sqrt{r_1 . r_2}$
b) r_1+r_2 e) $\frac{r_1+r_2}{2}$
c) $\frac{r_1 . r_2}{r_1+r_2}$

29. En el gráfico : P, Q, M y N son puntos de tangencia.
BP + BQ = 13 u, MN = 6 u.
Calcule el inradio del triángulo ABC.

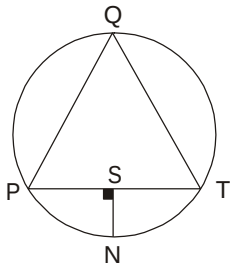


a) 2,5 u b) 3,5 u c) 4,5 u
d) 1,5 u e) 5,5 u

30. El perímetro de un triángulo rectángulo es 24 m y su hipotenusa mide 10 m. Calcule el radio de la circunferencia inscrita.

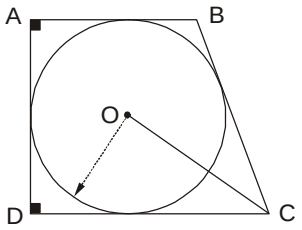
a) 1 m b) 2 m c) 3 m
d) 4 m e) 5 m

31. En el gráfico, el triángulo equilátero PQT, inscrito en una circunferencia. Calcule SN, en función del radio R.
Si : PS = ST.



a) R/2 b) R/3 c) R/4
d) $R\sqrt{2}$ e) $R\sqrt{3}$

32. En el gráfico, ABCD es un trapecio rectángulo. BC = 10 m, OC = 8 m. Calcule la altura del trapecio.



a) 4,8 m b) 9,6 m c) 4 m
d) 8 m e) 10 m

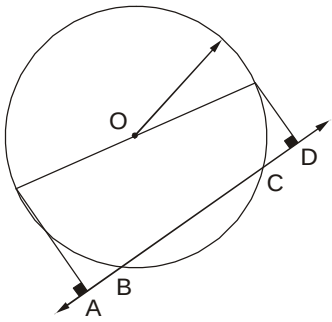
33. Si uno de los catetos de un triángulo rectángulo mide 15 cm y la distancia del baricentro al ortocentro es 25/3 cm. La altura relativa a la hipotenusa en cm mide :

a) 13 cm b) 14 cm c) 16 cm
d) 12 cm e) 15 cm

34. Los diámetros de dos circunferencias coplanares y las distancias entre sus centros, están en la relación 13 : 10: 1. Estos circunferencias son :

a) Secantes.
b) Tangentes interiores.
c) Interiores.
d) Exteriores.
e) Concéntricos.

35. En el gráfico : AB = 3 u y BC = 13 u.
Calcule AD.



a) 16 u b) 18 u c) 19 u
d) 21 u e) 22 u

36. En dos circunferencias ortogonales de radios R y r respectivamente, se cumple que la distancia d entre sus centros es :

a) $4(R-r) < d < R+r$
b) $R+r < d$
c) $(R-r)/2 < d < (R+r)/2$
d) $d^2 = R^2 + r^2$
e) $R+r = d$

37. El radio de la circunferencia y el perímetro de un triángulo rectángulo circunscrito a dicha circunferencia miden 3 cm y 50 cm respectivamente. Entonces, el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo rectángulo mide :

a) 44 cm b) 22 cm c) 11 cm
d) 12 cm e) 13 cm

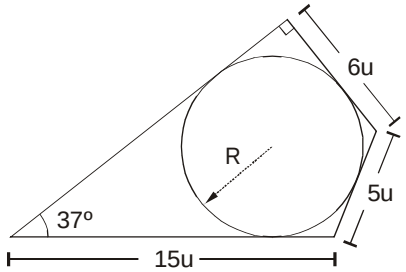
38. Sean O y O' los centros de dos circunferencias tangentes exteriormente cuyos diámetros son 2 u y 6 u respectivamente.
Calcule el ángulo agudo formado por la recta que une los centros y la tangente común a las circunferencias.

a) 60° b) 45° c) 30°
d) 15° e) 75°

39. En un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa mide 48 cm, se inscribe una circunferencia de longitud 24π cm. ¿Cuál es el perímetro de dicho triángulo?

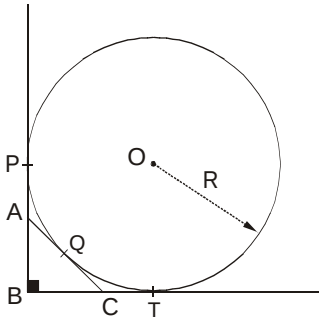
a) 120 cm b) 144 cm c) 96 cm
d) 72 cm e) 60 cm

40. Del gráfico, calcule "R".



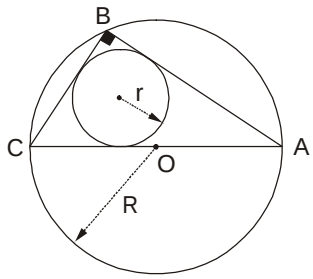
a) 3 u b) 4 u c) 5 u
d) 6 u e) 8 u

41. Calcule "R", si : AB = 9 u y BC = 12 u.
(P, Q y T : puntos de tangencia).



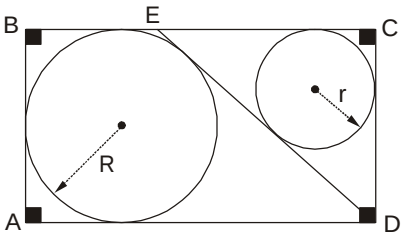
a) 15 u b) 16 u c) 18 u
d) 20 u e) 22 u

42. En la gráfico, calcule : R + r, si : AB = 15 u y BC = 8 u.



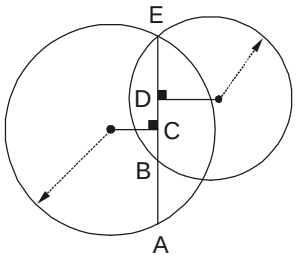
a) 23 u b) 11,5 u c) 10,5 u
d) 13,5 u e) 14 u

43. En el gráfico : R = 3 u y r = 1 u. Calcule BE.



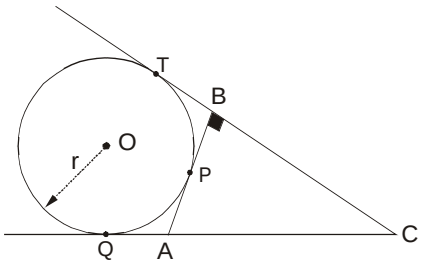
a) 3 u b) 4 u c) 5 u
d) 6 u e) 7 u

44. En el gráfico, calcule AB, si : CD = 6 cm.



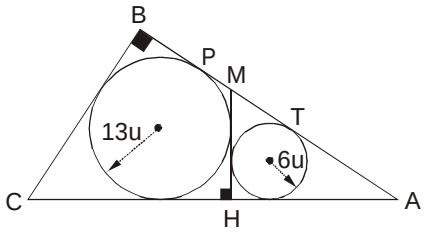
a) 6 cm b) 8 cm c) 10 cm
d) 12 cm e) 9 cm

45. Calcule "r", si : AB = 5 u y BC = 12 u.
(T, P y Q son puntos de tangencia).



a) 2 u b) 3 u c) 4 u
d) 5 u e) 10 u

46. Calcule PT.
P y T : puntos de tangencia.

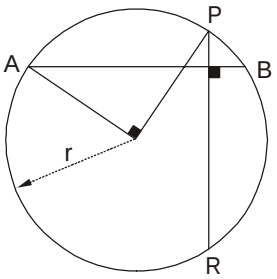


a) 15 u b) 17 u c) 19 u
d) 21 u e) 22 u

47. En un cuarto de circunferencia de centro "O" y radios $\overline{OA}$, $\overline{OB}$; se toma el punto "E" y luego : $\overline{AH} \perp \overline{OE}$; $\overline{BP} \perp \overline{OE}$ (H y P sobre $\overline{OE}$).
Calcule EP, si : AH = 15 u y BP = 8 u.

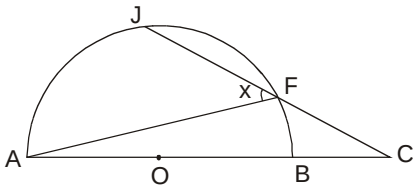
a) 1 u b) 2 u c) 3 u
d) 4 u e) 5 u

48. Calcule BR, siendo : r = 4u.



a) 8 u b) 4 u c) $4\sqrt{2}$ u
d) $8\sqrt{2}$ u e) $2\sqrt{2}$ u

49. En la figura : AO = OB = JF = FC.
Calcule "xº", si : $\overline{AB}$ es diámetro.

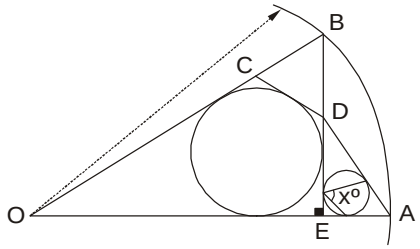


a) 15° b) 30° c) 45°
d) 60° e) 12°

50. Los diámetros de dos circunferencias situadas en el mismo plano están en la relación de 10 a 6 y la distancia entre sus centros es como 5. Tales circunferencias son:

a) Tangentes interiormente
b) Exteriores
c) Interiores
d) Tangentes exteriormente
e) Secantes

51. En el gráfico, calcule "xº", si :
BC = 6 u, CD = 1 u y EA = 3 u.
("O" centro).

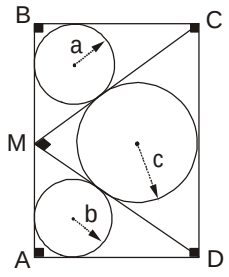


a) 45° b) 53° c) 55°
d) 60° e) 63° 30'

52. En un triángulo rectángulo, calcule la longitud de la hipotenusa, si el radio de la circunferencia inscrita mide 5 cm y el radio de la circunferencia exinscrita relativa a la hipotenusa mide 14 cm.

a) 5 cm b) 7 cm c) 6 cm
d) 8 cm e) 9 cm

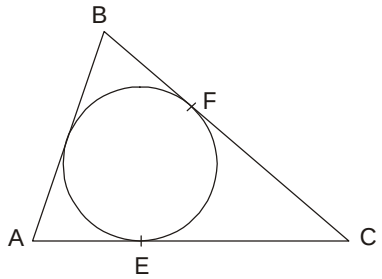
53. En el gráfico, calcule AD.



a) a + b - c b) b + c - a
c) a . b . c d) a + b + c
e) $\frac{a+2b+c}{3}$

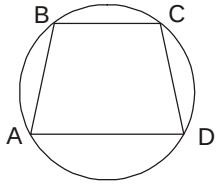
54. En el gráfico :
p : semiperímetro del triángulo ABC.

Calcule : $R = \frac{(p-a)(p-b)}{2.AE.BF}$



a) 2 b) 1 c) 1/2
d) 2/3 e) 4/3

55. En la figura : $\overline{BC} // \overline{AD}$, $m\widehat{ABC} = m\widehat{AD}$;
BC = a y AD = b. Calcule la distancia entre los puntos medios de las flechas de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

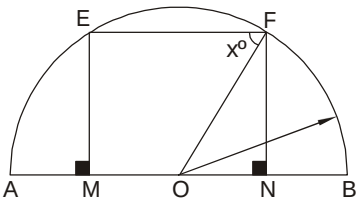


a) $\frac{a+3b}{4}$ b) $\frac{2a+3b}{4}$ c) $\frac{2a+b}{4}$
d) $\frac{3a+2b}{4}$ e) $\frac{a+b}{2}$

56. En una línea recta, se ubican los puntos consecutivos A, B y C (AB > BC); a un mismo lado de dicha recta se trazan las semicircunferencias de diámetros $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente y por C se traza la tangente $\overline{CT}$ a una de ellas. Calcular la medida del ángulo formado por $\overline{BT}$ y la bisectriz del ángulo BCT.

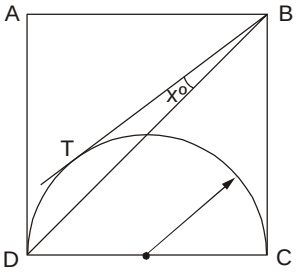
a) 45° b) 30° c) 60°
d) 15° e) 37°

57. En el gráfico :
AM = 4u; MN = 11u y NB = 5u. Calcule "xº".



a) 60° b) 113°/2 c) 90°
d) 70° e) 67°

58. ABCD es un cuadrado y "T" es punto de tangencia. Calcule "xº".

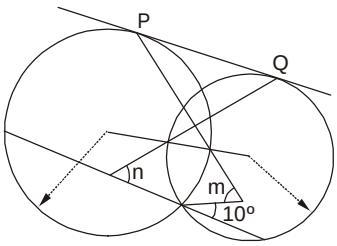


a) 6° b) 8° c) 12°
d) 16° e) 18°

59. Se tiene un triángulo rectángulo ABC circuncrito a una circunferencia de centro I; dicha circunferencia es tangente a los catetos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en P y Q respectivamente. Las prolongaciones de $\overline{PI}$ y $\overline{QI}$ corta a $\overline{AC}$ en R y L. Las circunferencias inscritas en los triángulos PAR y LQC son tangentes en M y N a $\overline{AC}$ respectivamente. Calcule MN, si los radios de las circunferencias menores miden 2 u y 3 u.

a) 1 u b) 2,5 u c) 4 u
d) 5 u e) 6 u

60. En el gráfico : P y Q son puntos de tangencia. Calcule : m + n.



a) 90° b) 100° c) 110°
d) 120° e) 130°

Claves

21.	d
22.	b
23.	b
24.	a
25.	a
26.	c
27.	c
28.	b
29.	b
30.	b
31.	a
32.	b
33.	d
34.	c
35.	c
36.	d
37.	c
38.	c
39.	a
40.	b

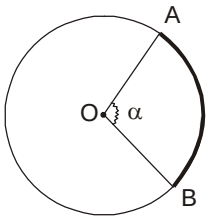
41.	c
42.	b
43.	c
44.	d
45.	b
46.	c
47.	b
48.	c
49.	c
50.	e
51.	e
52.	e
53.	d
54.	c
55.	a
56.	a
57.	b
58.	b
59.	d
60.	b

Capítulo

7

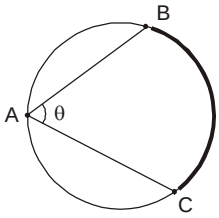
ÁNGULOS EN LA CIRCUNFERENCIA

* ***Ángulo Central***



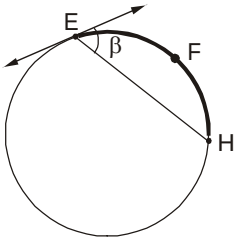
$$\alpha^o = m\overset{\frown}{AB}$$

* ***Ángulo Inscrito***



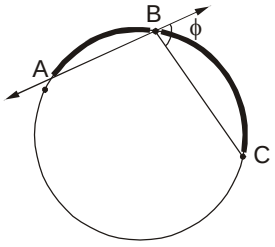
$$\theta^o = \frac{m\overset{\frown}{BC}}{2}$$

* ***Ángulo Seminscrito***



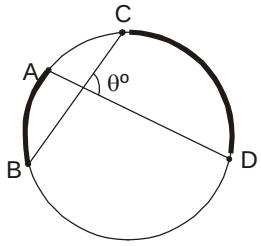
$$\beta^o = \frac{m\overset{\frown}{EFH}}{2}$$

* ***Ángulo Exinscrito***



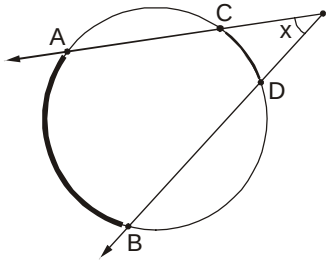
$$\phi^o = \frac{m\overset{\frown}{ABC}}{2}$$

* ***Ángulo Interior***

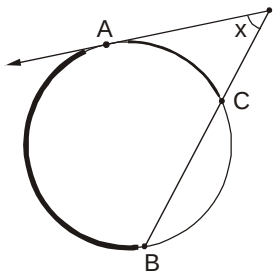


$$\theta^o = \frac{m\overset{\frown}{AB} + m\overset{\frown}{CD}}{2}$$

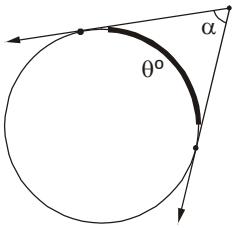
* ***Ángulo Exterior***



$$x^o = \frac{m\overset{\frown}{AB} - m\overset{\frown}{CD}}{2}$$

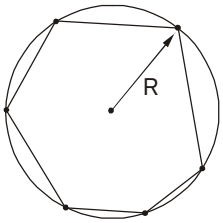


$$x^o = \frac{m\overset{\frown}{AB} - m\overset{\frown}{AC}}{2}$$



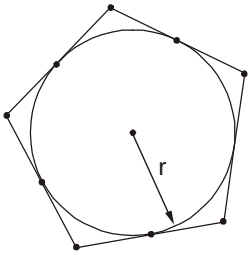
$\alpha^o + \theta^o = 180^o$

Polígono Inscrito



Circunferencia : circunscrita
Radio : circunradio

Polígono Circunscrito

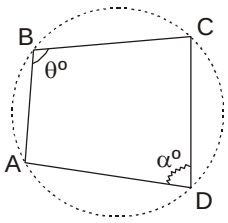


Circunferencia : inscrita
Radio : inradio

CUADRILÁTERO INSCRIPTIBLE

Es aquel cuadrilátero que acepta que se le describa una circunferencia por sus cuatro vértices. Para que esto suceda es necesario y suficiente que el cuadrilátero cumpla con una de las dos condiciones siguientes :

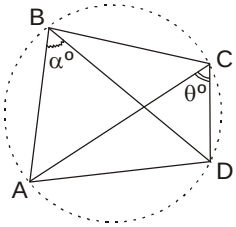
Primera condición :



Si : $\theta^o + \alpha^o = 180^o$

⇨ ABCD es un cuadrilátero inscriptible

Segunda condición :



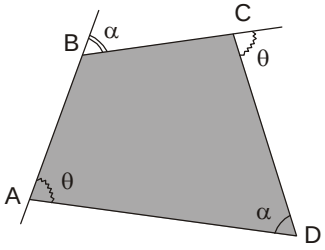
Si : $\alpha^o = \theta^o$

⇨ ABCD es un cuadrilátero inscriptible

Observaciones :

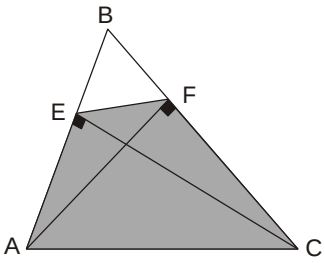
* Si un cuadrilátero cumple con una de las dos condiciones, entonces se cumplirán las dos a la vez.

* Si un cuadrilátero es inscriptible, entonces la medida de un ángulo interior es igual a la medida del ángulo exterior opuesto.

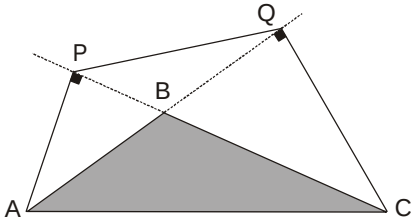


▱ ABCD inscriptible

* Dado un triángulo al trazar dos alturas, se observa que se determina un cuadrilátero inscriptible.



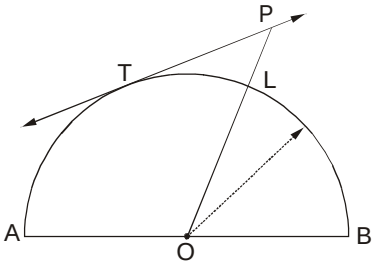
□ AEFC : inscriptible



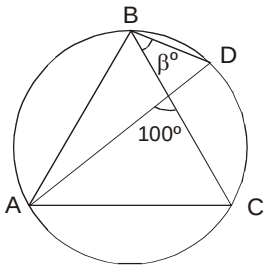
□ APQC : inscriptible

Test de aprendizaje preliminar

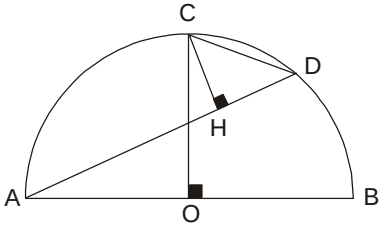
01. En el gráfico, TP = 4 u y AB = 6 u, calcule : $m\widehat{TL}$, siendo "T" punto de tangencia.



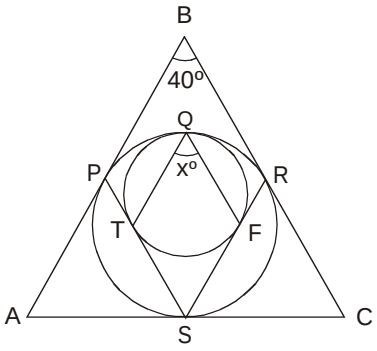
02. En el gráfico, ABC es un triángulo equilátero. Calcule "β^o".



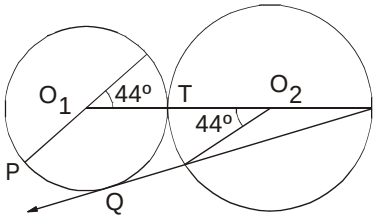
03. En el gráfico, O es centro y CH = 4 u. Calcule CD.



04. Del gráfico, calcule "xº". Si : P, Q, R, F, S y T, son puntos de tangencia.

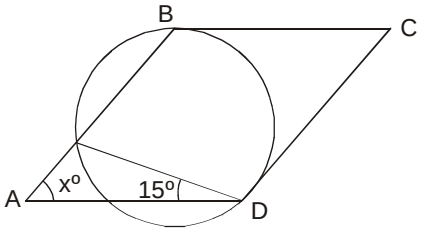


05. En el gráfico : O_1 y O_2 son centros de las circunferencias. Q y T son puntos de tangencia. Calcule $m\widehat{PQ}$.

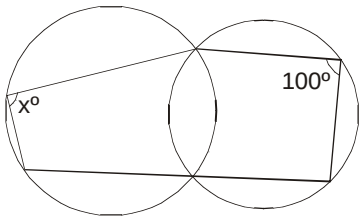


06. Se tienen 2 circunferencias de manera que la distancia entre sus centros y los radios de cada una de las circunferencias están en la relación de 3, 4 y 1 respectivamente. Por tanto, las circunferencias serían :

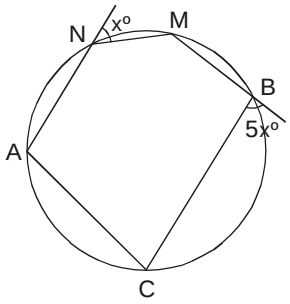
07. En el gráfico ABCD un romboide. Calcule "x°", B y D son puntos de tangencia.



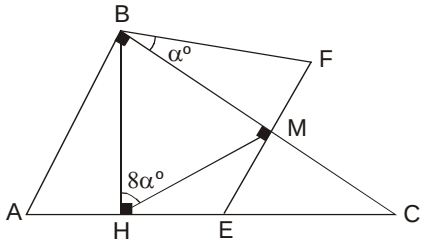
08. En el gráfico, calcule : "x°".



09. En el gráfico : AC = BC, m∢ACB = 60°, calcule "xº".

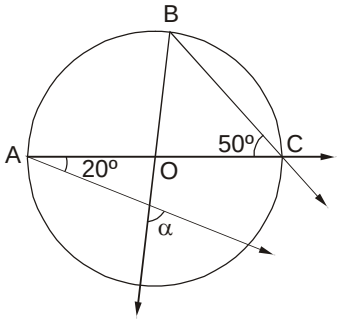


10. En el gráfico, calcule "αº". Si : MF = ME.

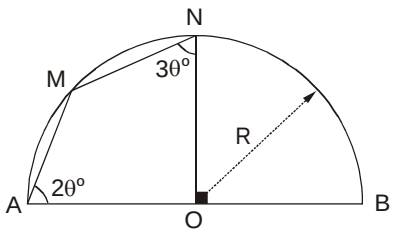


Practiquemos :

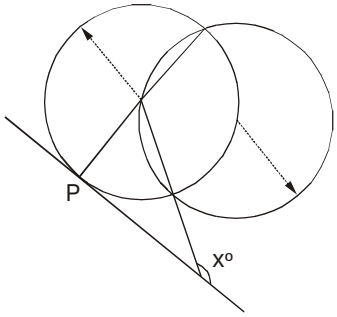
11. En la circunferencia de centro "O", calcule "αº".



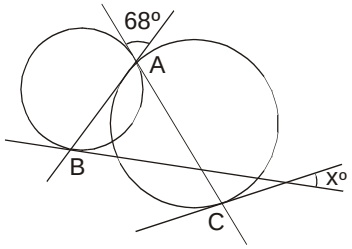
12. Del gráfico, calcule "θº".



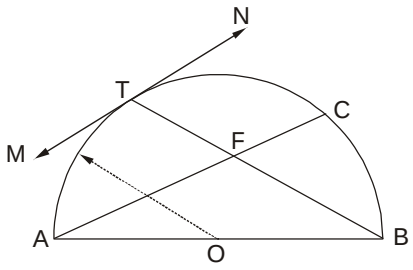
13. Del gráfico, calcule "xº". (P es punto de tangencia).



14. Si : A, B y C son puntos de tangencia. Calcule "xº".



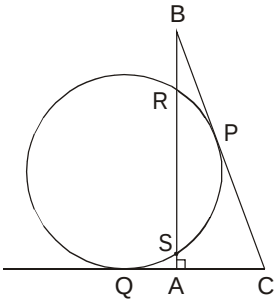
15. En el gráfico, "T" es punto de tangencia $\overline{AC} // \overline{MN}$ y la $m\sphericalangle CAB = 20°$. Calcule la $m\sphericalangle TFA$.



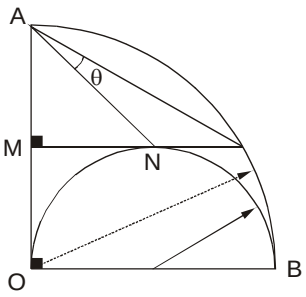
16. Se tiene un trapecio ABCD inscrito en una circunferencia $(\overline{BC} // \overline{AD})$.
Calcule la $m\sphericalangle BDA$, si :
$m\overset{\frown}{BC} + m\overset{\frown}{AD} = 100º$.

17. Se tiene un triángulo ABC y se traza la bisectriz interior $\overline{BD}$, luego se traza una circunferencia que pasa por el vértice B y es tangente a $\overline{AC}$ en el punto D, además corta a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en los puntos E y F, calcule la medida del ángulo C, si :
$m\overset{\frown}{BE} = 68°$.

18. En el gráfico, P y Q puntos de tangencia,
la $m\sphericalangle ABC = 10°$ y $m\overset{\frown}{PR} = 32°$.
Calcule la $m\overset{\frown}{QS}$.



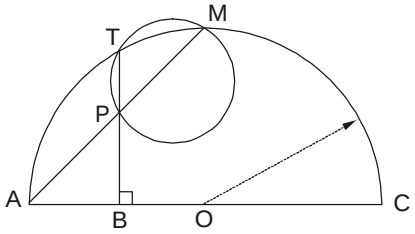
19. En el gráfico, calcule " θ^o ", si "N" es punto de tangencia.



20. En un triángulo isósceles ABC :
(AB = BC) m$\sphericalangle$BFE = 32°, siendo E y F los puntos de tangencia sobre los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ determinados por la circunferencia inscrita. Calcule la m$\sphericalangle$B.

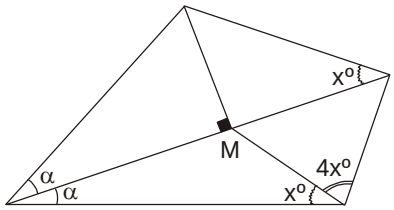
Problemas propuestos

21. En el gráfico, calcule la $m\overset{\frown}{TP}$, si :
2(BO) = 3(AB).



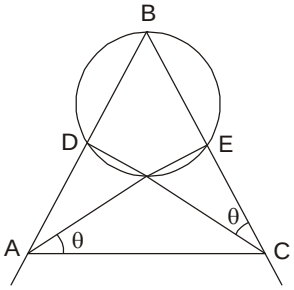
a) 37° b) 53° c) 30°
d) 60° e) 36°

22. Del gráfico mostrado, calcule "x^o".



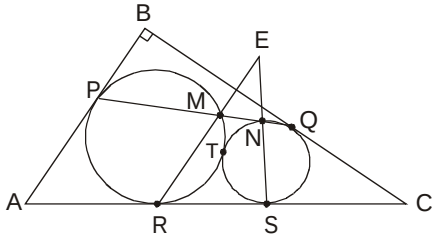
a) 20° b) 30° c) 37°
d) 22,5° e) 18°

23. En el gráfico, calcule AD, si : BD = 4u y AC = 12u.



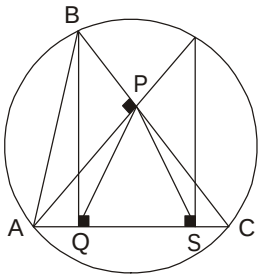
a) 6 u b) 7 u c) 8 u
d) 10 u e) 5 u

24. En el gráfico se muestra dos circunferencias tangentes exteriormente en T, y tangentes a dos de los lados del triángulo rectángulo ABC, siendo los puntos de tangencia P, R, S, Q y T. Calcule la medida del ángulo REN.



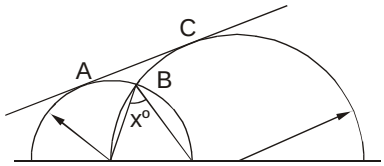
a) 30° b) 37° c) 45°
d) 53° e) 60°

25. En el gráfico, $m\widehat{ABC} = 220^o$, calcule la m$\sphericalangle$ QPS.



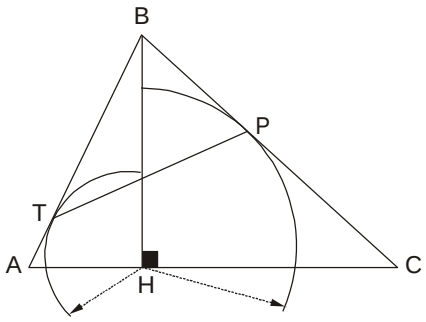
a) 30° b) 40° c) 50°
d) 35° e) 80°

26. En el gráfico, calcule "x°", si : $m\widehat{AB} + m\widehat{BC} = 80^o$.
Donde : A y C son puntos de tangencia.



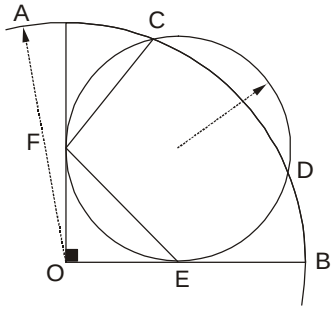
a) 50° b) 40° c) 5°
d) 35° e) 30°

27. En el gráfico, el punto "H" es el centro de los dos arcos de circunferencia mostrados. T y P puntos de tangencia y la m$\sphericalangle$ HBC = 50°, calcule m$\sphericalangle$ BTP.



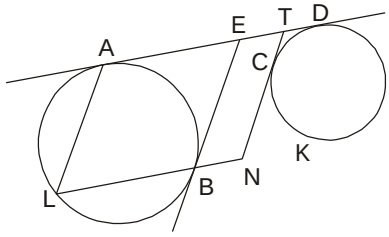
a) 60° b) 20° c) 40°
d) 50° e) 30°

28. En el gráfico, EF = FC. Calcule la $m\widehat{AC}$.
(F y E son puntos de tangencia).



a) 15° b) 18° 30' c) 22°30'
d) 26°30' e) 30°

29. En el gráfico : A, B, C y D son puntos de tangencia, ETNB es un romboide y $m\widehat{CD} = \frac{2}{3}$ (m$\sphericalangle$ ALB). Calcule la m$\sphericalangle$ BNC.

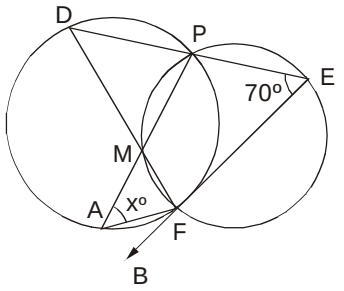


a) $\frac{45^\circ}{2}$ b) 45° c) 135°
d) 37° e) 53°

30. Desde un punto "P" exterior a la circunferencia, se trazan las tangentes $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$; en $\overline{PA}$ está el punto "E", tal que:
OE = EP; la tangente $\overline{EF}$ determina el arco FB ($m\widehat{FB} = 32^o$). Calcule la m$\sphericalangle$ EOP y "O" : centro de la circunferencia.

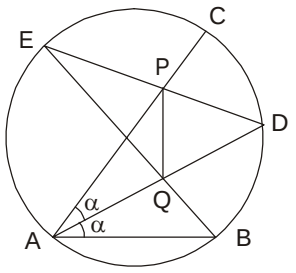
a) 16° b) 24° c) 32°
d) 48° e) 64°

31. En el gráfico, calcule "x°", siendo F punto medio de tangencia, m$\sphericalangle$ AFB = 30°.



a) 50° b) 45° c) 30°
d) 40° e) 35°

32. En el gráfico : $m\widehat{AB} = 100°$.
Calcule la m$\sphericalangle$ APQ.

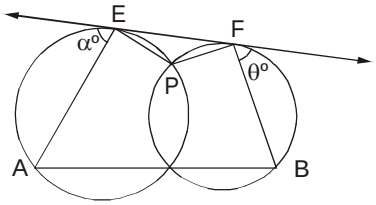


a) 50° b) 60° c) 30°
d) 45° e) 55°

33. Se tiene un triángulo ABC inscrito en una circunferencia; sobre $\overset{\frown}{AB}$ y $\overset{\frown}{BC}$ se ubican los puntos P y Q, tal que : $m\overset{\frown}{PB} = m\overset{\frown}{BQ}$. Calcule : $m\sphericalangle BAC + m\sphericalangle BEQ$, siendo: $\{E\} = \overline{BC} \cap \overline{PQ}$.

a) 90° b) 100° c) 120°
d) 180° e) 160°

34. En el gráfico, calcule la $m\sphericalangle EPF$, si : $\alpha^o+\theta^o = 140°$, E y F son puntos de tangencia. Además : $\overline{EF} // \overline{AB}$.

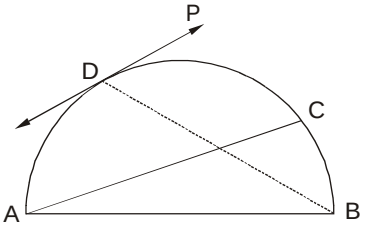


a) 120° b) 140° c) 130°
d) 150° e) 125°

35. En un triángulo isósceles ABC (AB = BC) se trazan las cevianas $\overline{AD}$ y $\overline{BF}$, que se forman en un punto "E", tal que la $m\sphericalangle DAC = 60°$. Calcule la $m\sphericalangle ABE$, si el cuadrilátero CDEF es inscriptible.

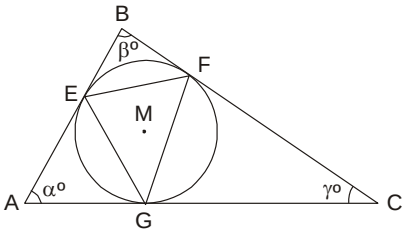
a) 20° b) 60° c) 80°
d) 30° e) 5°

36. En el gráfico se muestra un arco de circunferencia ADCB, donde $\overline{AB}$ es el diámetro del arco de circunferencia se cumple que : $m\sphericalangle CAB = 20°$, además : $\overline{DP}$ es paralelo a $\overline{AC}$ y $\overline{DP}$ es tangente al arco. Calcule la $m\sphericalangle PDB$.



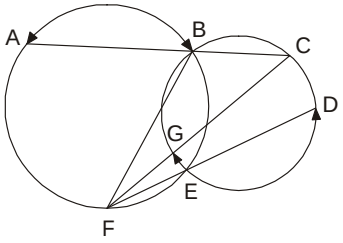
a) 45° b) 55° c) 25°
d) 65° e) 35°

37. En el gráfico : $\alpha^o = 62°$, $\beta^o = 68°$, $\gamma^o = 50°$. En la circunferencia inscrita, determinados puntos de tangencia son E,F, G. Calcule las medidas de los ángulos GEF, EFG y FGE respectivamente.



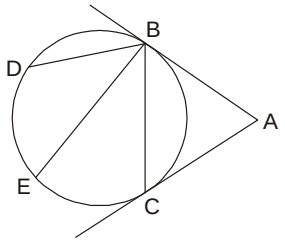
a) 65°, 59°, 56° b) 60°, 60°, 60°
c) 50°, 62°, 68° d) 68°, 60°, 62°
e) 62°, 68°, 60°

38. En el gráfico, calcule la medida del ángulo BFC, si los arcos $\overset{\frown}{AB}$ y $\overset{\frown}{DEG}$ miden 80° y 100°, respectivamente.



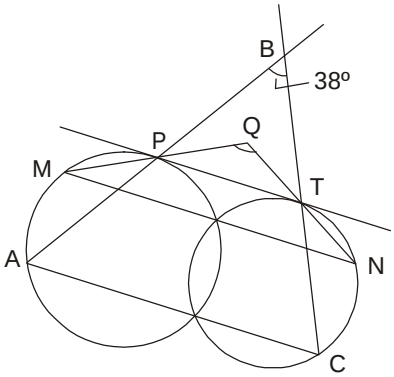
a) 20° b) 15° c) 30°
d) 10° e) 25°

39. En el gráfico, $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ son tangentes a la circunferencia.
Si : $m\sphericalangle BAC = 72°$ y los arcos $\overset{\frown}{BD}$, $\overset{\frown}{DE}$ y $\overset{\frown}{EC}$ son congruentes, calcule la medida del ángulo DBE.



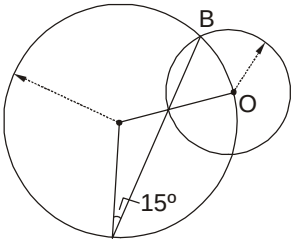
a) 28° b) 36° c) 40°
d) 42° e) 48°

40. En el gráfico, la recta $\overleftrightarrow{PT}$ es tangente común a las dos circunferencias secantes. Si el ángulo ABC mide 38°. Calcule la medida del ángulo MQN.



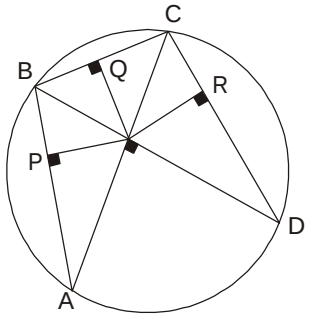
a) 148° b) 142° c) 138°
d) 152° e) 128°

41. Del gráfico, calcule $m\overset{\frown}{OB}$.



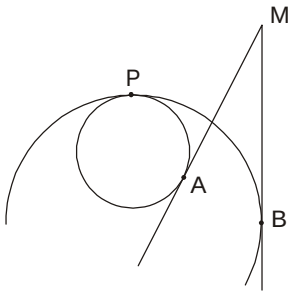
a) 20° b) 35° c) 40°
d) 30° e) 50°

42. En el gráfico la $m\overset{\frown}{BC} = 40°$. Calcule la $m\sphericalangle PQR$.



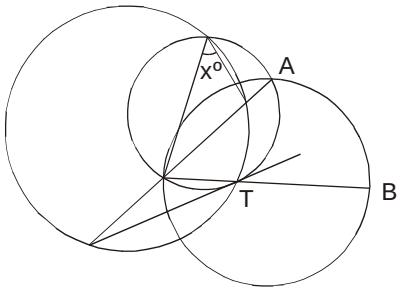
a) 120° b) 150° c) 140°
d) 160° e) 135°

43. En el gráfico : $m\overset{\frown}{AP} - m\overset{\frown}{BP} = 28^o$.
Calcule la $m\sphericalangle AMB$, donde : A, P y B, son puntos de tangencia.



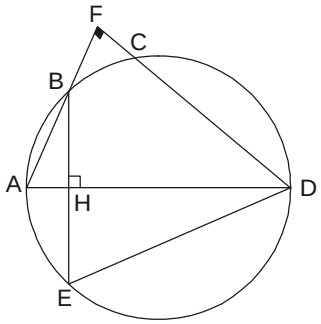
a) 28° b) 21° c) 14°
d) 7° e) 30°

44. En el gráfico : $m\overset{\frown}{AB} = 100°$.
Calcule "x°". (T es punto de tangencia).



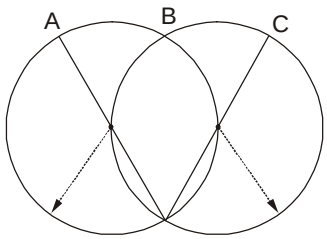
a) 25° b) 40° c) 45°
d) 50° e) 80°

45. En el gráfico, si : BH = 4 u y HE = 6 u. Calcule BC.



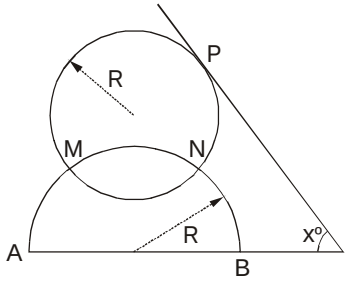
a) 2 u b) 3 u c) 4 u
d) 5 u e) 6 u

46. En el gráfico : $m\overset{\frown}{AB} = \theta^o$ y $m\overset{\frown}{BC} = \alpha^o$.
Encuentre la relación correcta :



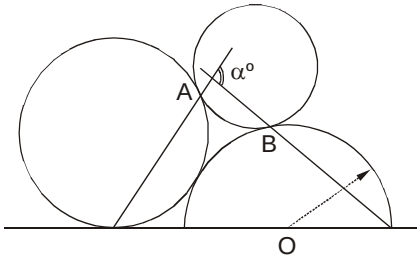
a) $\theta^o = 2\alpha^o$ b) $2\sqrt{2}\alpha^o = \theta^o$
c) $\alpha^o + 2\theta^o = 90°$ d) $\theta^o + 2\alpha^o = 180°$
e) $2\theta^o + 3\alpha^o = 270°$

47. En el gráfico :
$m\overset{\frown}{MN} = m\overset{\frown}{NP}$; $m\overset{\frown}{AM} = m\overset{\frown}{NB} = 40°$. Calcule "x°".



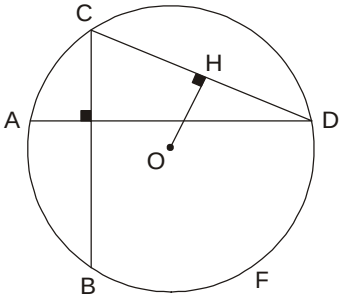
a) 20° b) 25° c) 30°
d) 35° e) 40°

48. En el gráfico, calcule "α °" $m\overset{\frown}{AB} = 50^o$; A y B son puntos de tangencia.



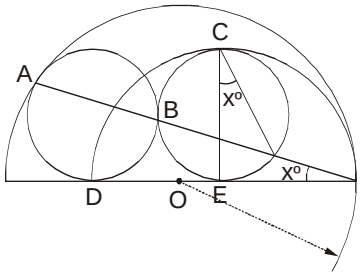
a) 85° b) 110° c) 80°
d) 100° e) 90°

49. En el gráfico, AB = 12 m y "O" es centro de la circunferencia. Calcule OH.



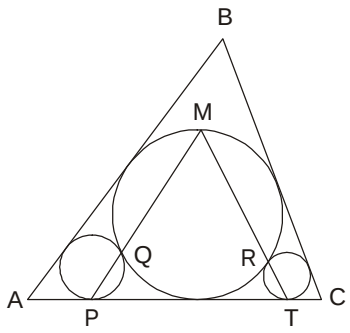
a) 4 u b) 5 u c) 3 u
d) 6 u e) 1 u

50. En el gráfico, calcule "xº", si : A, B, C, D, E; son puntos de tangencia.



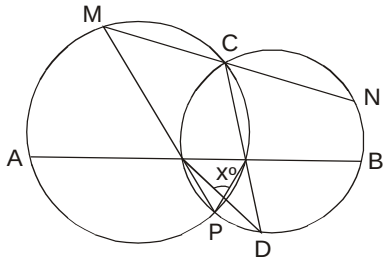
a) 30° b) 15° c) 22°30'
d) 20° e) 25°

51. En el gráfico, calcule la m∢ ABC, si : P, Q, R y T son puntos de tangencia y además :
m∢ PMT = m∢ ABC.



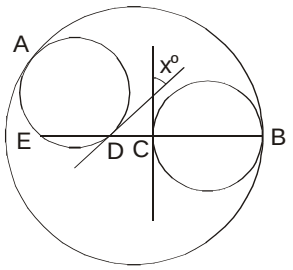
a) 30° b) 45° c) 50°
d) 60° e) 80°

52. En el gráfico : $\overline{MP} // \overline{CD}$ y
$m\overset{\frown}{AMC} + m\overset{\frown}{NB} = 160º$. Calcule "xº".



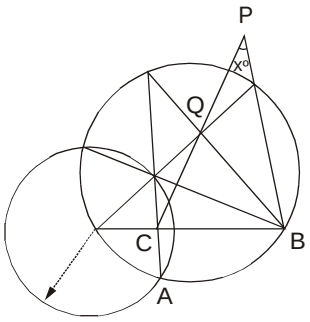
a) 80° b) 100° c) 50°
d) 65° e) 70°

53. En el gráfico : A, B, C y D son puntos de tangencia.
$m\overset{\frown}{AB} = 120º$ y $m\overset{\frown}{AE} = 110º$. Calcule "xº".



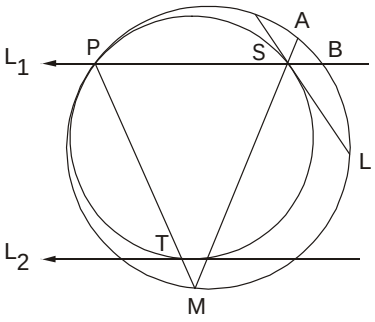
a) 50° b) 40° c) 30°
d) 25° e) 20°

54. En el gráfico, $m\overset{\frown}{AB} = 100º$. Calcule "xº".



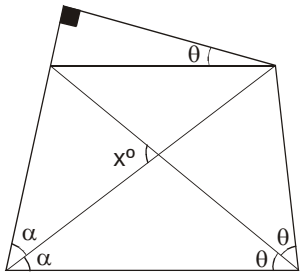
a) 50° b) 40° c) 60°
d) 70° e) 80°

55. En el gráfico, calcule la m∢ MSL.
Si : $m\overset{\frown}{AP} = 100º$, $m\overset{\frown}{AB} = 20º$; (P, S y T son puntos de tangencia) y $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$.



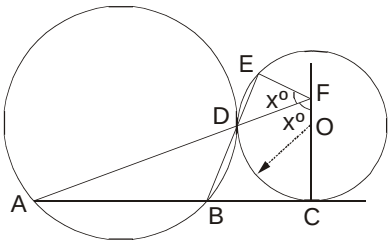
a) 60° b) 70° c) 80°
d) 85° e) 90°

56. Del gráfico, calcule "xº".



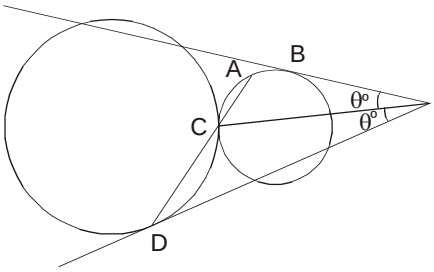
a) 30° b) 45° c) 60°
d) 53° e) 90°

57. En el gráfico, calcule "xº", siendo C y D puntos de tangencia.



a) 50° b) 70° c) 60°
d) 65° e) 55°

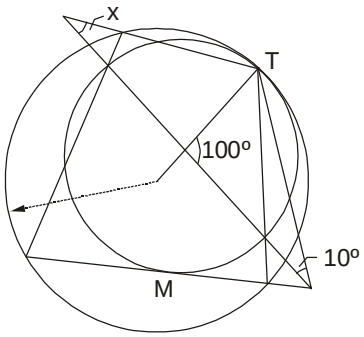
58. En el gráfico : B, C y D son puntos de tangencia. Calcule la $m\widehat{AB}$.



a) $\frac{3\theta^o}{2}$ b) $2\theta^o$ c) θ^o

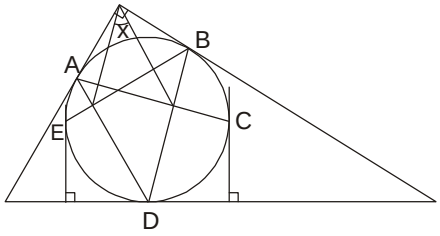
d) $90^o+\frac{\theta^o}{2}$ e) $90-\frac{\theta^o}{2}$

59. En el gráfico, T y M son puntos de tangencia. Calcule "xº".



a) 20° b) 10° c) 15°
d) 40° e) 35°

60. En el gráfico, calcule "xº". A, B, C, D y E son puntos de tangencia.



a) 30° b) 45° c) 60°
d) 90° e) 50°

Claves

21.	b
22.	b
23.	c
24.	c
25.	b
26.	a
27.	c
28.	d
29.	c
30.	a
31.	e
32.	a
33.	d
34.	b
35.	b
36.	b
37.	a
38.	d
39.	d
40.	b

41.	c
42.	c
43.	a
44.	d
45.	a
46.	d
47.	c
48.	b
49.	d
50.	c
51.	d
52.	a
53.	a
54.	a
55.	c
56.	c
57.	c
58.	b
59.	a
60.	b

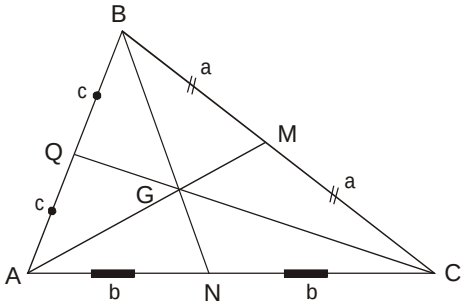
Capítulo

8 PUNTOS NOTABLES

Son los puntos de concurrencia de las líneas notables de un triángulo.

I. ***BARICENTRO*** : Es el punto de intersección de las 3 medianas de un triángulo.

Propiedad : El baricentro determina en cada mediana dos segmentos que están en la relación de 2 es a 1.

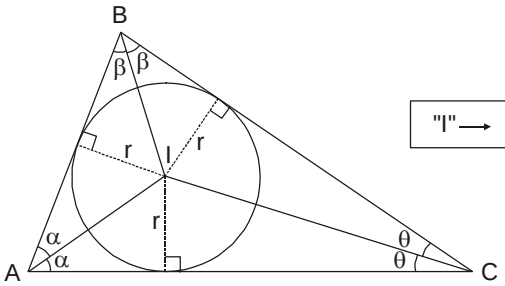


G ⟶ Baricentro del ΔABC

$BG = 2GN$

$BG = \frac{2}{3}BN$; $GN = \frac{1}{3}BN$

II. ***INCENTRO*** : Es el punto de intersección de las 3 bisectrices interiores de un triángulo.



"I" ⟶ Incentro del ΔABC

Propiedades :

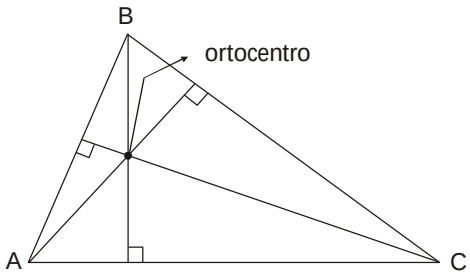
Primera : El incentro es el centro de la circunferencia inscrita.

Segunda : El incentro equidista de los lados del triángulo.
(una distancia r) $\rightarrow$ inradio.

III. ***ORTOCENTRO*** : Es el punto de concurrencia de las tres alturas de un triángulo.

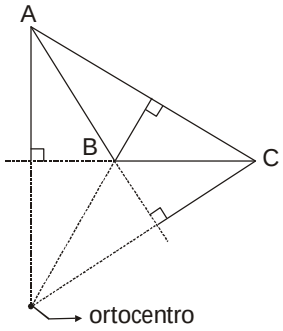
1. En un triángulo acutángulo, el ortocentro se encuentra en la región triangular.
2. En un triángulo obtusángulo, el ortocentro es exterior al triángulo.
3. En un triángulo rectángulo, el ortocentro se encuentra en el vértice del ángulo recto.

1.



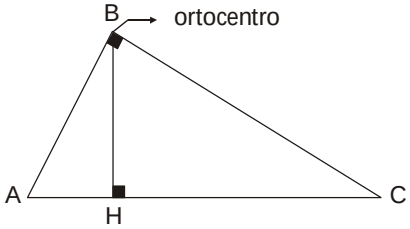
∆ *Acutángulo*

2.



∆ *Obtusángulo*

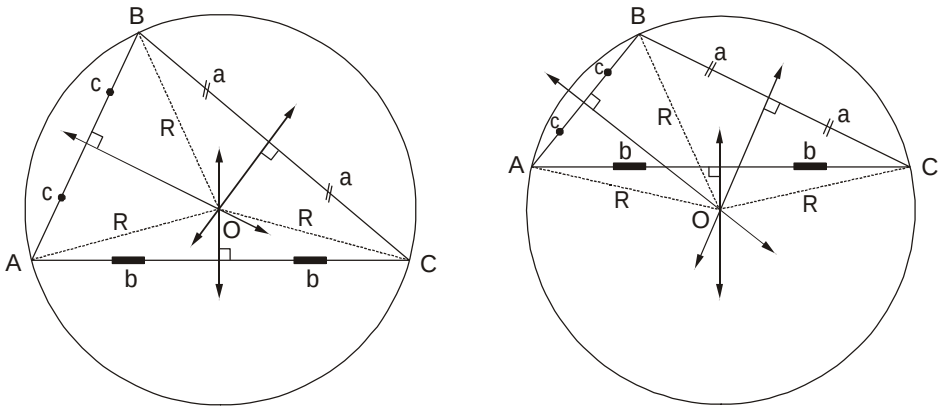
3.

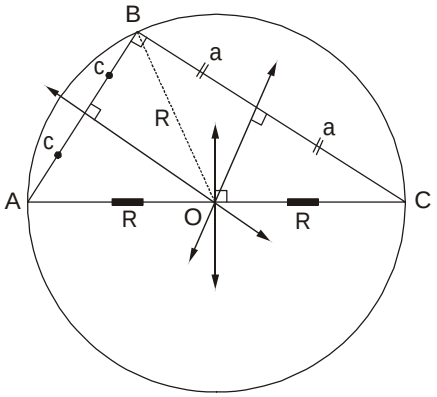


∆ *Rectángulo*

IV. CIRCUNCENTRO : Es el punto de intersección de las mediatrices, de los lados de un triángulo.

"O" ⟶ Circuncentro del ∆ABC



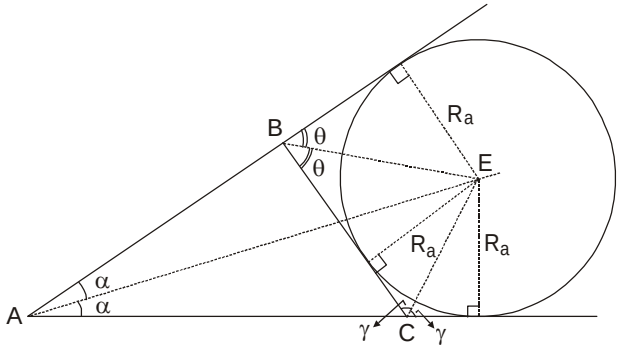


Propiedades :

1ra. : El circuncentro es el centro de la circunferencia circunscrita.
2da. : El circuncentro equidista de los vértices del triángulo.
(Una distancia R). R $\rightarrow$ circunradio.

V. EXCENTRO : Es el punto de intersección de dos bisectrices exteriores y una bisectriz interior.
Nota : Todo triángulo tiene tres excentros.

E $\rightarrow$ Excentro relativo al lado $\overline{BC}$

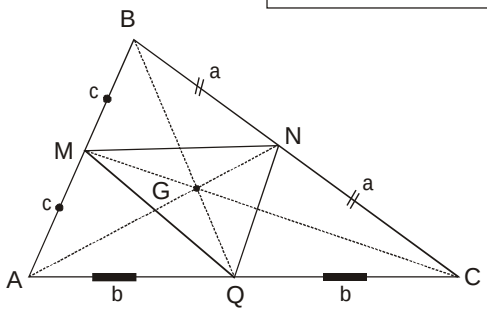


Propiedades :

1ra. Propiedad : El excentro es el centro de la circunferencia exinscrita.
2da. Propiedad : El excentro equidista de un lado y de las prolongaciones de los otros dos lados, (una distancia R_a)
R_a $\rightarrow$ Exradio relativo a $\overline{BC}$.

TRIÁNGULOS PARTICULARES

1. TRIÁNGULO MEDIANO : Es el triángulo que se determina al unir los puntos medios de los lados de un triángulo.



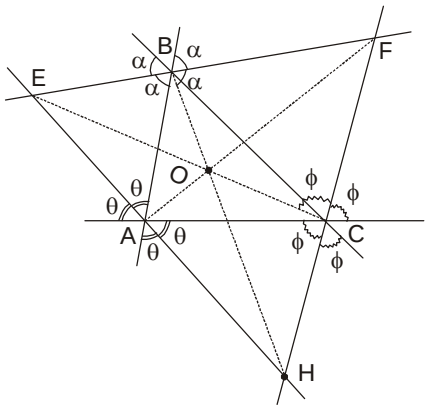
$\Delta MNQ \rightarrow \Delta$ mediano o complementario del ΔABC

Propiedad :

G → Baricentro del ΔABC

G → Baricentro del ΔMNQ

2. TRIÁNGULO EX-INCENTRAL : Es el triángulo que se determina al unir los tres excentros.



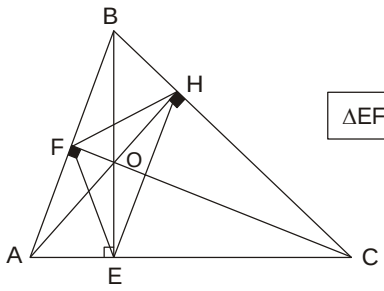
$\Delta EFH \rightarrow \Delta$ ex-incentral del ΔABC

Propiedad :

O → Ortocentro del ΔEFH

O → Incentro del ΔABC

3. TRIÁNGULO ÓRTICO O PEDAL : Es el triángulo que se determina al unir los pies de las 3 alturas de un triángulo.



ΔEFH es el Δ órtico del ΔABC

Propiedades :

1ra. Propiedad :

O → Ortocentro del ΔABC

O → Incentro del ΔEFH

2da. Propiedad :

Siendo : $\hat{E}$, $\hat{F}$ y $\hat{H}$ los ángulos internos de ΔEFG.

$$m\hat{H} = 180° - 2(m\hat{A})$$

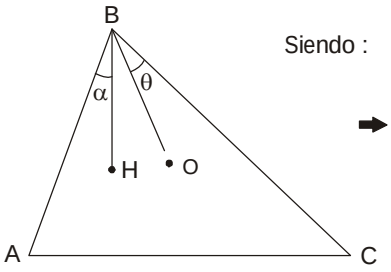
$$m\hat{E} = 180° - 2(m\hat{B})$$

$$m\hat{F} = 180° - 2(m\hat{C})$$

3ra. Propiedad : A, B y C son excentros del ΔEFH.

PROPIEDADES ADICIONALES

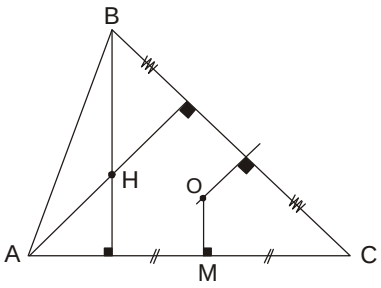
1.



Siendo : H → Ortocentro
O → Circuncentro

$\Rightarrow \boxed{\alpha = \theta}$

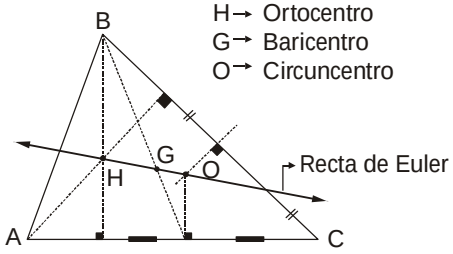
2. La distancia del ortocentro a un vértice es el doble de la distancia del circuncentro al lado opuesto del vértice considerado.



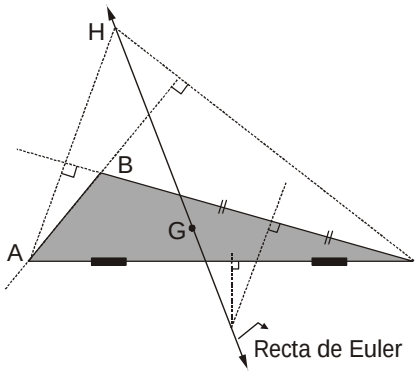
H → Ortocentro
O → Circuncentro

$\boxed{HB = 2\,OM}$

3. El ortocentro, baricentro y circuncentro se encuentran en una misma recta; llamada la ***Recta de Euler***.



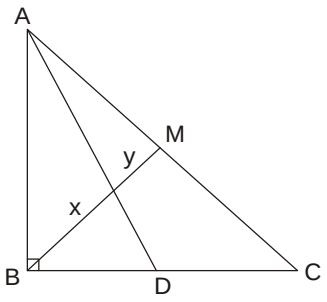
* Δ ***Acutángulo***



* Δ ***Obtusángulo***

Test de aprendizaje preliminar

01. En el gráfico : $\overline{AD}$ y $\overline{BM}$ son medianas del triángulo rectángulo ABC, y AC = 30 u.
Calcule "x" e "y" en metros.



02. Un triángulo ABC se trazan las alturas $\overline{AE}$ y $\overline{BF}$ que se intersectan en "D". Si el ángulo ADC mide 125°. Calcule la m$\sphericalangle$ ABE.

03. En un triángulo ABC, de baricentro G, m$\sphericalangle$ BGC = 90°, m$\sphericalangle$ GBC = 30°; GC = 2m. Calcule AG.

04. En el arco AC de una semicircunferencia de diámetro $\overline{AC}$, se ubica el punto"B", tal que "E" es el excentro del triángulo ABC relativo a $\overline{BC}$, $\overline{AE}$ interseca al arco BC en "D"; tal que BD = 2u. Calcule CE.

05. En un cuadrilátero ABCD; m$\sphericalangle$ B = 120°; m$\sphericalangle$ D = 110°, m$\sphericalangle$ ABD = 60° y m$\sphericalangle$ ADB = 40°.
Calcule la medida del ángulo que forman sus diagonales.

06. La distancia entre el centro de la circunferencia circunscrita a un triángulo rectángulo y el punto de intersección de sus tres alturas es igual a :

07. En un triángulo ABC acutángulo la m$\sphericalangle$ BAC = 72°. Calcule la m$\sphericalangle$ OBC, siendo "O" su circuncentro.

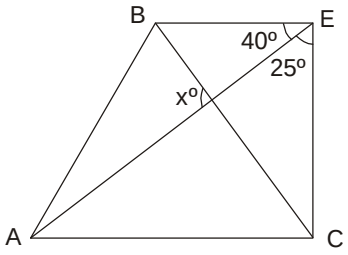
08. En un triángulo ABC se traza la ceviana interior $\overline{BR}$, tomando como diámetro $\overline{AR}$ se traza la semicircunferencia que intersecta a $\overline{BR}$ en "O". Calcule la m$\sphericalangle$ BCA, si "O" es el circuncentro del triángulo ABC.

09. En un triángulo ABC de circuncentro "K" y excentro relativo a $\overline{BC}$ "E".
Calcule la m$\sphericalangle$ BKC, siendo la m$\sphericalangle$ BEC = 60°.

10. Se tiene un triángulo ABC de ortocentro "O" y circuncentro "K", $m\sphericalangle ABC = 60°$ en el cual se traza la altura $\overline{BH}$.
Calcule la $m\sphericalangle KOH$, si : $m\sphericalangle AOH = 40°$.

Practiquemos :

11. En el gráfico, calcule x°, si "E" es el excentro del triángulo ABC.

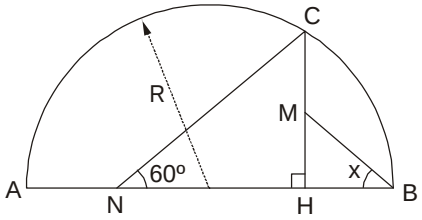


12. En un triángulo acutángulo ABC, se cumple que : $m\sphericalangle AHC = 2m\sphericalangle AKC$, donde "H" es el ortocentro y "K" el es circuncentro del triángulo ABC.
Calcule la $m\sphericalangle B$.

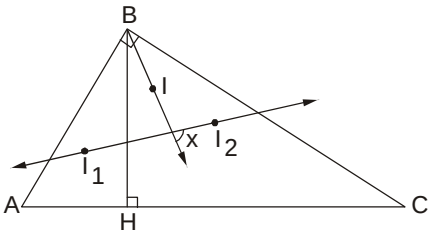
13. En un triángulo acutángulo ABC, se ubica el ortocentro "H" y se traza el cuadrado BHGL, G pertenece a $\overline{BC}$.
Calcule la $m\sphericalangle HGA$, si: $m\sphericalangle ABC = 54°$.

14. En un triángulo ABC de incentro "I" y excentro "E" relativo al lado $\overline{BC}$, la diferencia entre el exradio relativo a $\overline{BC}$ y el inradio es dos veces la distancia del vértice C a $\overline{EI}$, y además la $m\sphericalangle ABC = 30°$.
Calcule la $m\sphericalangle ACB$.

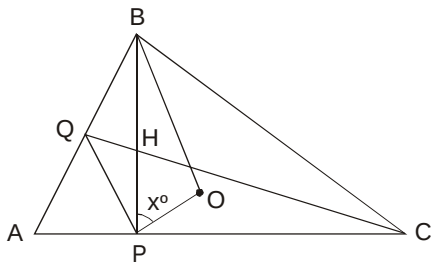
15. En el gráfico, calcule "xº", si : M y N son puntos medios de $\overline{CH}$ y $\overline{AH}$ respectivamente.



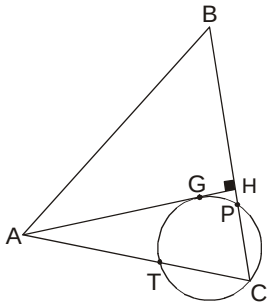
16. Calcule "xº", si : I, I_1, I_2 son incentros de los triángulos ABC, AHB y BHC respectivamente.



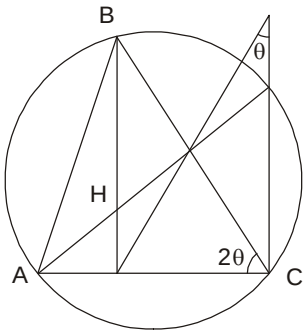
17. En el gráfico : $\overline{PQ} // \overline{BO}$, "H" y "O" son ortocentro y circuncentro del triángulo ABC, respectivamente. Calcule "xº".



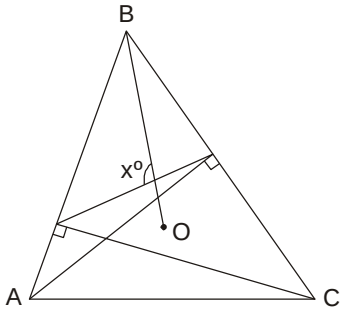
18. En el gráfico, "G" es el baricentro de la región triangular ABC, calcule BP, si : AG = 12 u y PC = 16 u.
("G" es punto de tangencia).



19. Se considera el triángulo ABC de ortocentro H.
Calcule " θº ".

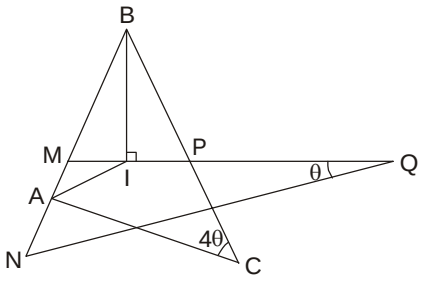


20. En el gráfico, "O" es el circuncentro del triángulo ABC. Calcule "xº".



Problemas propuestos

21. En el gráfico mostrado, "I" es incentro del triángulo ABC, AM = AN y AI = 3u.
Calcule : PQ.



a) $3\sqrt{3}$ u b) 8 u c) 6 u
d) $6\sqrt{2}$ u e) $3\sqrt{2}$ u

22. Se tiene un triángulo rectángulo ABC, recto en B, de incentro I, se traza $\overline{IH} \perp \overline{AC}$. Calcule HC si su exradio relativo a $\overline{BC}$ mide 4 m.

a) 3 m b) 4 m c) $4\sqrt{2}$ m
d) 2 m e) $4\sqrt{3}$ m

23. En la prolongación de lado $\overline{AB}$ de un cuadrilátero ABCD se marca el punto E, tal que : m∢EBC = 48°, m∢CBD = 78°, m∢BDC = 30°, m∢ADB = 54°. Calcule la m∢BAC.

a) 9° b) 18° c) 36°
d) 30° e) 54°

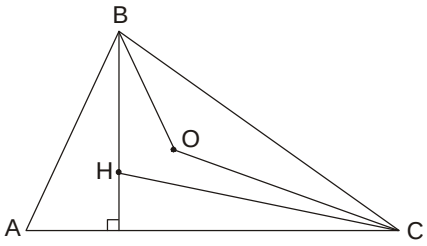
24. Se tiene un triángulo isósceles ABC de base $\overline{AC}$, ortocentro "H" y circuncentro "O".
m∢OAH = m∢OBC. Calcule la m∢ABO.

a) 15° b) 18° c) 18°30'
d) 22°30' e) 26°30'

25. Se tiene un triángulo acutángulo ABC, de ortocentro "H" y circuncentro "O". Calcule la m∢HBO, si :
m∢BAC - m∢ACB = 40°.

a) 20° b) 30° c) 40°
d) 50° e) 60°

26. En el gráfico : "H" es el ortocentro del triángulo ABC, "O" es el circuncentro y $\frac{HB}{OB} = \frac{6}{5}$.
Calcule la suma de las medidas de los ángulos HCO y OBC.



a) 30° b) 37° c) 45°
d) 53° e) 60°

27. En un triángulo ABC acutángulo de ortocentro "O", la recta de Euler corta en el punto "F" al lado AC. Calcule la m∢FDC. Si AF = 2FC = 2OB. ("D" es circuncentro del triángulo ABC).

a) 53°/2 b) 37°/2 c) 45°
d) 30° e) 60°

28. En un triángulo ABC, se ubican los puntos interiores "H" (ortocentro) y "O" (circuncentro), m∢ABC = 60°. Calcule la medida del ángulo que forman las rectas $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{HO}$.

a) 30° b) 45° c) 60°
d) 90° e) 40°

29. En un triángulo acutángulo ABC de ortocentro "H", la recta de Euler interseca a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en los puntos P y Q respectivamente, tal que : PB = BQ. Calcule la distancia de P a $\overline{BC}$.
Si : AH + HC = 18 u.

a) 9 u b) 10 u c) 6 u
d) 4,5 u e) 3 u

30. En un triángulo ABC, se tiene que :
BH = BO, m∢ABH = 2m∢HBO. Calcule la m∢HAO, siendo "H" el ortocentro y "O" su circuncentro.

a) 9° b) 5° c) 10°
d) 8° e) 6°

31. Para determinar en un plano la posición de un punto equidistante de 3 puntos A, B y C (que no pertenecen a una línea recta), se busca la intersección de :

a) Las bisectrices de los ángulos ABC y BCA.
b) Las mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.
c) La bisectriz de ABC y la mediatriz de $\overline{AC}$.
d) La mediatriz de $\overline{AB}$ y la bisectriz del ángulo ABC.
e) La altura y la mediatriz de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$.

32. Sea un triángulo ABC inscrito en una circunferencia y sean los puntos C', B' y A' los puntos medios de los arcos AB, BC y CA respectivamente. ¿Qué punto notable es el incentro del triángulo ABC para el $\Delta A'B'C'$?

a) Ortocentro. b) Incentro.
c) Circuncentro. d) Baricentro.
e) Excentro.

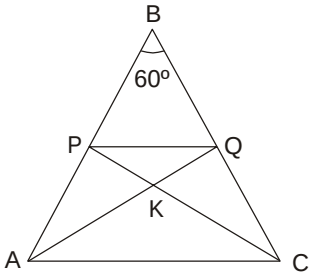
33. En un cuadrado ABCD en los lados $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ se ubican los puntos medios M y N, tal que $\overline{AM} \cap \overline{BN} = \{P\}$. ¿Qué punto notable es el centro del cuadrado respecto al triángulo NPA?

a) Ortocentro. b) Ex-centro.
c) Baricentro. d) Incentro.
e) Circuncentro.

34. Las prolongaciones de las alturas en un triángulo acutángulo ABC intersectan a la circunferencia circunscrita en los puntos M, N y P. ¿Qué punto notable es el ortocentro del triángulo ABC respecto al triángulo MNP?

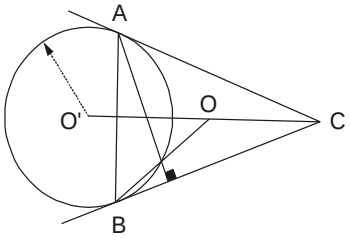
a) Ortocentro. b) Excentro.
c) Baricentro. d) Incentro.
e) Circuncentro.

35. En el gráfico, AP = PQ = QC. ¿Qué punto notable es "K" respecto del triángulo ABC?



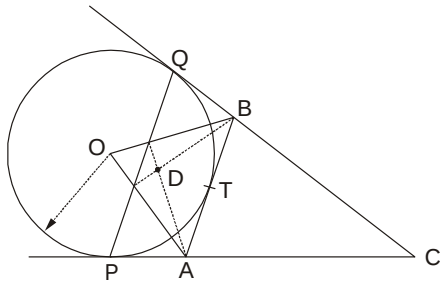
a) Incentro. b) Circuncentro.
c) Ortocentro. d) Baricentro.
e) Excentro.

36. En el gráfico mostrado, ¿qué punto notable es "O", para el triángulo ABC?
(A, B, puntos de tangencia).



a) Incentro. b) Baricentro.
c) Ortocentro. d) Circuncentro.
e) Excentro.

37. En el gráfico : P, Q y T puntos de tangencia, ¿Qué punto notable es "D" para el triángulo OBA?



a) Ortocentro. b) Baricentro.
c) Incentro. d) Circuncentro.
e) Jerabek.

38. Sobre los lados $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ de un rectángulo ABCD se toman los puntos M y P respectivamente, tal que :
PMCD es un cuadrado de centro O, si :
$\{\overline{AO} \cap \overline{MP}\} = \{Q\}$, AB = BQ.
Calcule la $m\sphericalangle OAD$.

a) 15° b) 26°30' c) 22°30'
d) 18°30' e) 30°

39. ¿Qué punto notable es el vértice de un ángulo obtuso de un triángulo obtusángulo para su respectivo triángulo pedal?

a) Baricentro. b) Circuncentro.
c) Incentro. d) Ortocentro.
e) Punto de Gergonne.

40. En un triángulo ABC interiormente se ubica el punto "P" y sobre los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ los puntos R y Q respectivamente, tal que los triángulos APR y BPQ son equiláteros, además $m\sphericalangle RPQ = 90°$. Decir qué punto notable es "P" del triángulo ABC.

a) Ortocentro. b) Incentro.
c) Baricentro. d) Circuncentro.
e) Cualquier punto.

41. En un triángulo isósceles ABC, la :
$m\sphericalangle B = 120°$. Calcule la $m\sphericalangle IEK$, siendo :
I : incentro y E : excentro relativo al lado $\overline{BC}$ y
K = circuncentro.

a) 15º b) 20º c) 30º
d) 25º e) 35º

42. En un triángulo ABC, se sabe que :
$m\sphericalangle A = m\sphericalangle C = 30°$ y $AC = 9\sqrt{6}$ dm.
Calcule la distancia del circuncentro al excentro del triángulo relativo a $\overline{BC}$.

a) 9 dm b) 12 dm c) 18 dm
d) 21 dm e) 27 m

43. En un triángulo acutángulo ABC por A y C se trazan perpendiculares a $\overline{AC}$ que intersecta a la recta de Euler en M y N respectivamente. Calcule la longitud del circunradio.
Si : AM = 2 u, CN = 4 u y BH = BO; donde "H" es el ortocentro y "O" es el circuncentro del triángulo ABC.

a) 2 u b) 3 u c) 4 u
d) 5 u e) 6 u

44. Los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ de un triángulo ABC miden 7 cm; 8 cm y 10 cm respectivamente. Por el incentro, se trazan paralelas a los lados. Calcule la suma de los perímetros de 2 triángulos entre el tercero formado por dichas paralelas que tienen en común el incentro.

a) 17 cm b) 2 cm c) 5/3 cm
d) 17/7 cm e) 3/2 cm

45. En un triángulo acutángulo ABC por A y C se trazan las perpendiculares a $\overline{AC}$ que intersecta a la recta de Euler en M y N respectivamente. Calcule BO.
Si : AM = a, CN = b y BH = BO, donde : "H" es el ortocentro y "O" es el circuncentro del triángulo ABC.

a) $\frac{a+b}{2}$ b) $\frac{a+b}{3}$ c) $\frac{a-b}{2}$
d) a + b e) 2(a+b)

46. Se tiene un triángulo ABC : BC = 48 u y la distancia del incentro al excentro relativo a $\overline{BC}$ es 50u. Calcule la $m\sphericalangle BAC$.

a) 16° b) 32° c) 64°
d) 74° e) 106°

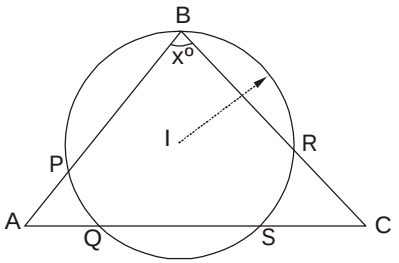
47. En un triángulo ABC, de excentro "E" relativo a $\overline{AB}$. Calcule la medida del ángulo formado por las bisectrices de los ángulos EAB y ECB.
Si : $m\sphericalangle ABC = 36°$.

a) 9° b) 18° c) 27°
d) 36° e) 5°

48. En un triángulo actuángulo ABC :
$m\sphericalangle A = \phi$. Calcule una de las medidas de los ángulos internos de su triángulo pedal.

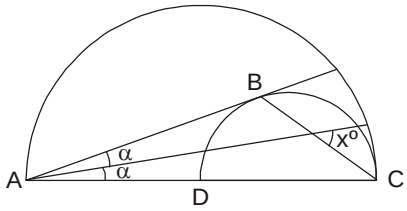
a) $90° - \phi°$ b) $90° - 2\phi°$
c) $180° - \phi°$ d) $180° - 2\phi°$
e) $90° + \frac{\phi°}{2}$

49. En el gráfico, calcule x°, siendo "I" el incentro del triángulo ABC y además : $m\overset{\frown}{PQ} + m\overset{\frown}{RS} = 60°$.



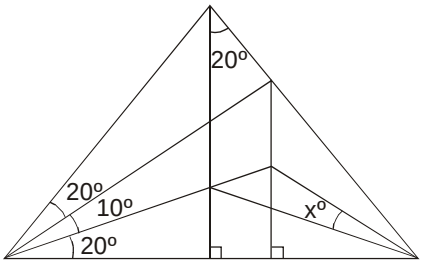
a) 60° b) 40° c) 100°
d) 90° e) 80°

50. Del gráfico $\overline{AB}$ es tangente, tal que : $\overline{AC}$ y $\overline{DC}$ son diámetros. Calcule "xº".



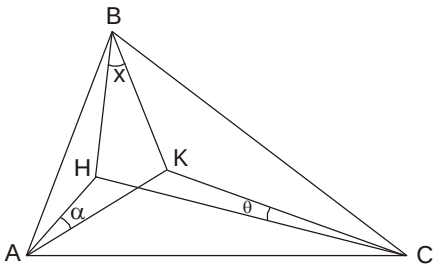
a) 30° b) 60° c) 15°
d) 37° e) 45°

51. Del gráfico, calcule : x°.



a) 10° b) 15° c) 20°
d) 5° e) 30°

52. Del gráfico, calcule "x°", siendo :
H : ortocentro, K : circuncentro y
$\alpha° + \theta° = 36°$.



a) 18° b) 24° c) 5°
d) 72° e) 36°

53. En un triángulo isósceles ABC :
la $m\sphericalangle ABC = 120°$ y $AC = 2\sqrt{3}$ u. Calcule la distancia del circuncentro al excentro relativo a $\overline{BC}$.

a) 2 u b) 3 u c) $2\sqrt{2}$ u
d) $3\sqrt{2}$ u e) $1{,}5\sqrt{2}$ u

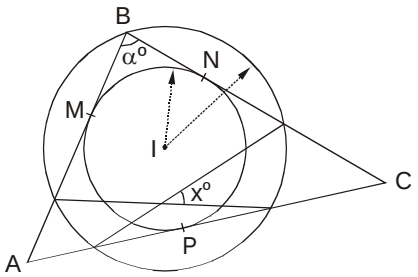
54. En un triángulo ABC, la $m\sphericalangle BAC = 24°$, $m\sphericalangle BCA = 30°$; se traza la ceviana $\overline{BF}$, tal que AB = FC. Calcule la $m\sphericalangle FBC$.

a) 60° b) 75° c) 72°
d) 84° e) 96°

55. En un triángulo acutángulo ABC, el ortocentro es "H" y el circuncentro es "O". Si la distancia de "O" a $\overline{AC}$ es 4 cm y $\overline{HO} // \overline{AC}$. Calcule la longitud de la altura relativa a $\overline{AC}$ del triángulo ABC.

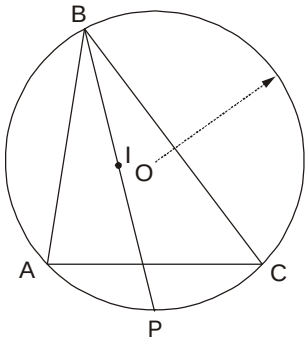
a) 10 cm b) 8 cm c) 6 cm
d) 14 cm e) 12 cm

56. En el gráfico, calcule "x°", si :
$\alpha° = 80°$ y M, N y P son puntos de tangencia.



a) 10° b) 20° c) 30°
d) 40° e) 50°

57. En el gráfico, "I" es incentro. Calcule IP, si :
$AC = 10\sqrt{3}$ u y $m\sphericalangle ABC = 60°$.



a) 5 u b) 10 u c) 20 u
d) 15 u e) $10\sqrt{3}$ u

58. Se tiene una región triangular ABC de baricentro G, con centro en A y radio $\overline{AG}$ se traza un arco que interseca a $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ en M y N, respectivamente, de tal forma que $\overline{BN} \cap \overline{CM} = G$. Calcule BC, si el radio del arco es 4u.

a) 8 u b) $4\sqrt{7}$ u c) $2\sqrt{7}$ u
d) $6\sqrt{5}$ u e) 10 u

59. Se tiene el triángulo ABC inscrito en una circunferencia, sobre el arco BC se toma el punto P, tal que :
$BP = 4\sqrt{2}$ u.
Calcule la distancia entre los ortocentros de los triángulos ABC y APC.

a) 2 u b) 4 u c) 6 u
d) $2\sqrt{2}$ u e) $4\sqrt{2}$ u

60. Si la circunferencia inscrita del triángulo ABC es tangente a los lados BC, CA y AB en P, Q y R, respectivamente, las líneas AP, BQ, CR, son concurrente. El punto de concurrencia es llamado.

a) Incentro. b) Ortocentro.
c) Baricentro. d) Circuncentro.
e) Punto de Georgonne.

Claves

21.	c
22.	b
23.	b
24.	d
25.	c
26.	b
27.	a
28.	c
29.	a
30.	e
31.	b
32.	a
33.	d
34.	d
35.	b
36.	d
37.	a
38.	c
39.	c
40.	a

41.	c
42.	c
43.	e
44.	e
45.	d
46.	b
47.	c
48.	d
49.	e
50.	e
51.	c
52.	e
53.	c
54.	e
55.	e
56.	c
57.	b
58.	b
59.	e
60.	e

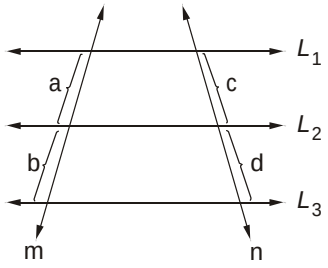
Capítulo

9

PROPORCIONALIDAD Y SEMEJANZA

TEOREMA DE THALES

Si tres o más rectas paralelas, son intersecadas por dos rectas secantes a las paralelas; entonces, se determinan entre las rectas paralelas, segmentos proporcionales.

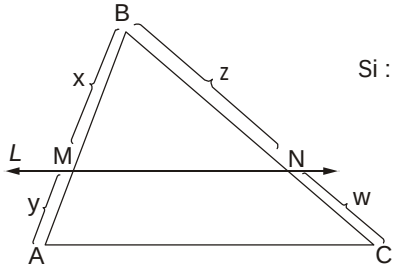


Si : * $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2} // \overleftrightarrow{L_3}$

* $\overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{n}$ secantes

$$\Rightarrow \boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d}}$$

Propiedad :



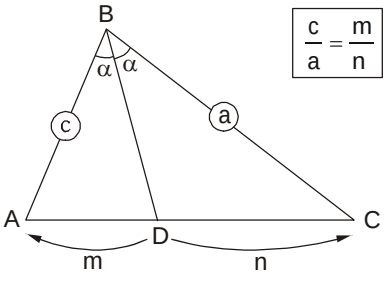
Si : $L // \overline{AC} \Rightarrow \boxed{\frac{x}{y} = \frac{z}{w}}$

Teorema de Thales en un triángulo.

Propiedad de la Bisectriz

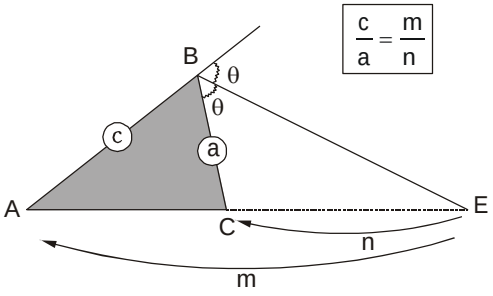
En un triángulo, los lados que forman el vértice de donde se traza la bisectriz son proporcionales a los segmentos determinados por dicha bisectriz en el lado opuesto o su prolongación.

*** *Bisectriz Interior***



$$\boxed{\frac{c}{a} = \frac{m}{n}}$$

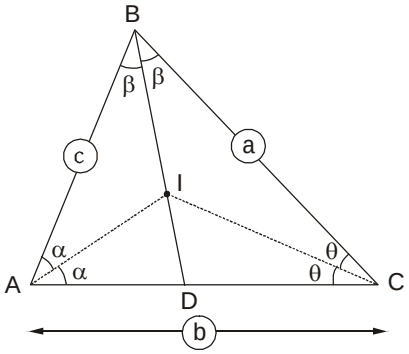
*** *Bisectriz Exterior***



$$\boxed{\frac{c}{a} = \frac{m}{n}}$$

TEOREMA DEL INCENTRO

El incentro determina en cada bisectriz dos segmentos que son proporcionales a la suma de los lados que forman el vértice de donde parte la bisectriz y al tecer lado.

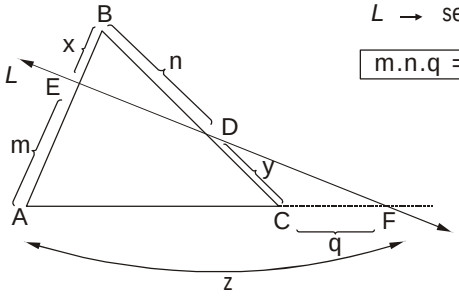


"I" → incentro

$$\frac{BI}{ID} = \frac{c+a}{b}$$

TEOREMA DE MENELAO

Si se traza una recta transversal a los lados de un triángulo, se determinan sobre dichos lados 6 segmentos, donde el producto de 3 de ellos no consecutivos es igual al producto de los otros 3 restantes.

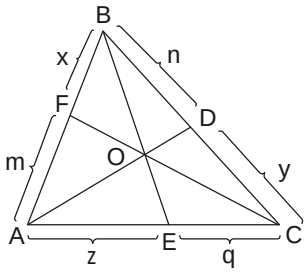


L → secante

m.n.q = x.y.z

TEOREMA DE CEVA

Si en un triángulo se trazan 3 cevianas interiores concurrentes, se determinan sobre los lados 6 segmentos, donde el producto de 3 de ellos no consecutivos es igual al producto de los otros 3 restantes.



* $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$ cevianas
* "O" cevacentro

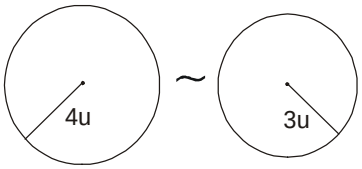
m.n.q = x.y.z

SEMEJANZA

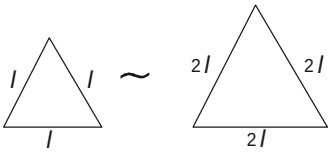
Definción : Dos figuras son semejantes se tienen la misma forma, y tamaños distintos.

Ejm. :

*



*

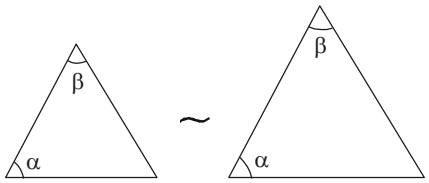


SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

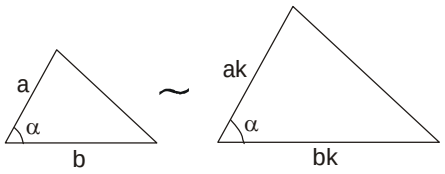
Dos triángulos son semejantes si tienen sus ángulos respectivamente congruentes y sus lados homólogos respectivamente proporcionales.

Lados Homólogos : Se denomina así a aquellos lados que se oponen a ángulos congruentes en triángulos semejantes

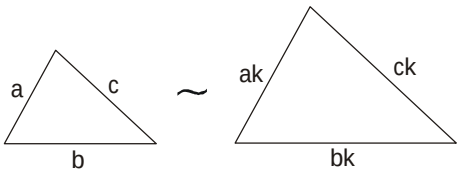
Primer Caso : Dos triángulos serán semejantes si tienen 2 ángulos internos respectivamente de igual medida.



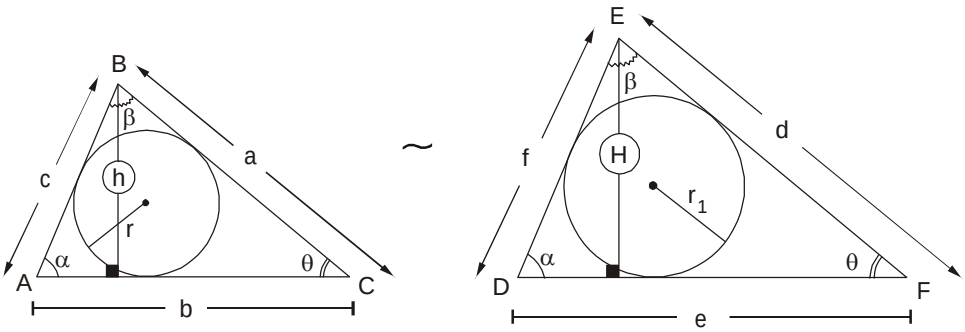
Segundo Caso : Dos triángulos serán semejantes si tienen dos lados respectivamente proporcionales y el ángulo comprendido entre dichos lados congruentes.



Tercer Caso : Dos triángulos serán semejantes, si sus tres lados son respectivamente proporcionales.



Observaciones : En dos triángulos semejantes, sus lados homólogos, así como sus elementos homólogos : (alturas, bisectrices, medianas, inradios, circunradios, etc.), son respectivamente proporcionales.

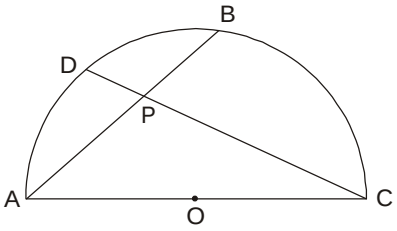


Se cumple :

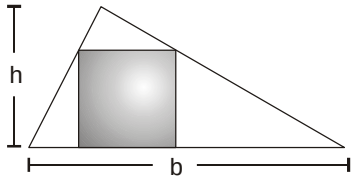
$$\frac{a}{d}=\frac{b}{e}=\frac{c}{f}=\frac{r}{r_1}=\frac{h}{H}=.....=k$$

Test de aprendizaje preliminar

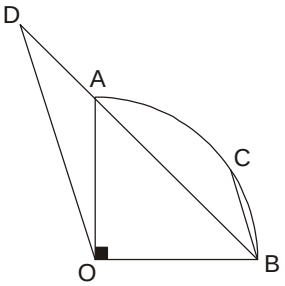
01. "O" es centro de la semicircunferencia.
CP = 8 u; DP = 2 u; AB = 8u. Calcule PB.



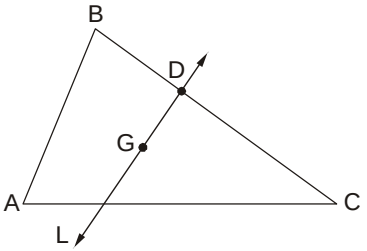
02. Calcule el lado del cuadrado, mostrado en la figura, en función de la base "b" del triángulo sobre el cual descansa y de la altura "h" relativa a dicha base.



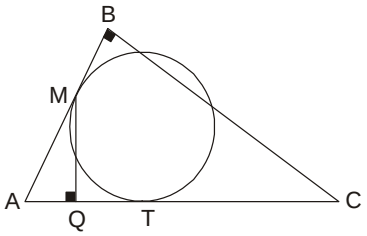
03. Según el gráfico : $\overline{BC} // \overline{OD}$ y OD = 2AB.
Calcule BC. Si : AD = 4u.



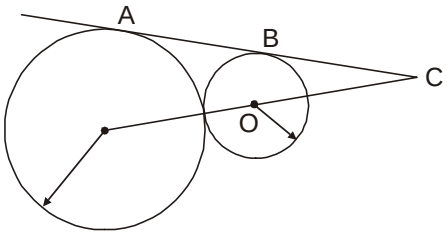
04. En el gráfico, BC = 15 u. Calcule DC, si : G es baricentro del triángulo ABC y L es paralela a $\overline{AB}$.



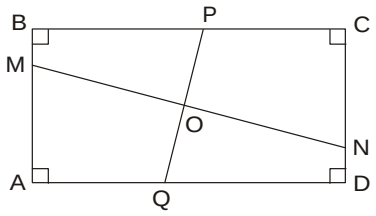
05. Del gráfico, calcule MQ, si :
BC = 25 u y TC = 4AT.
M y T : puntos de tangencia.



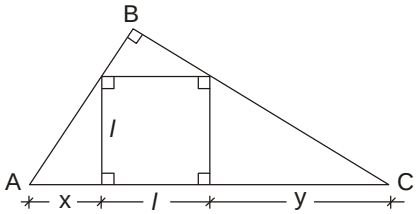
06. En el gráfico, calcule el radio de la cicunferencia mayor donde : OC = 5 m, BC = 4 m.



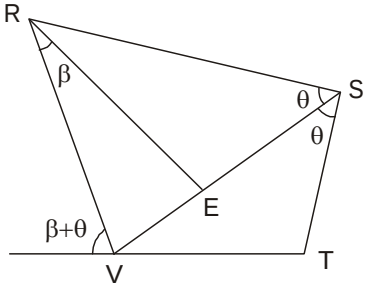
07. En el gráfico, se tiene un rectángulo ABCD en el cual : AD = 2CD, y donde :
m∢OMA = m∢BPO. Si : $\overline{MN}$ y $\overline{PQ}$ se intersectan en O, de modo que : PO = 2 cm, QO = 4 cm y MO = 5 cm. Calcule NO.



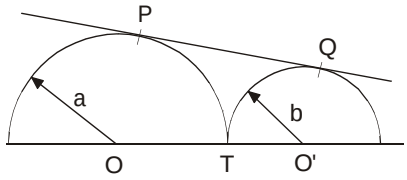
08. Calcule la medida de la hipotenusa del triángulo ABC.
Si : $x^2 + y^2 = 20\ u^2$; $l = \sqrt{8}$ u.



09. RS = 10 u, ES = 5 u, VE = 3 u.
Calcule ST.



10. P, Q y T son puntos de tangencia, a y b son los radios de las semicircunferencias. Determinar la distancia de T a la recta $\overleftrightarrow{PQ}$.



Practiquemos :

11. En un triángulo ABC, se ubica el incentro "I" sobre la bisectriz $\overline{BM}$, de tal manera que :
3IB = 2BM. Calcule AC, si : AB + BC = 24 u.

12. En un triángulo ABC, se trazan las cevianas interiores $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ y $\overline{CL}$ concurrentes en P, de tal manera que:
5AL = 2AB y 9BM = 5BC. Calcule : $(\frac{PB}{PN})$.

13. En un triángulo ABC, se traza la bisectriz interior $\overline{BF}$, luego por F se traza $\overline{FQ} // \overline{AB}$ (Q en $\overline{BC}$), la bisectriz del ángulo FQC intersecta a $\overline{AC}$ en R.
Si : FR = a y RC = b. Calcule AF.

14. Del punto medio P del cateto $\overline{AB}$ de un triángulo ABC, recto en B, se traza la perpendicular $\overline{PH}$ a la hipotenusa $\overline{AC}$. De tal manera que : AH = 6 u y HC = 9 u. Calcule PB.

15. Calcule la longitud de la altura de un trapecio rectángulo, cuyas diagonales son perpendiculares entre sí y las bases miden 6 y 12 unidades.

16. Los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ de un triángulo ABC miden 8 m y 10 m. Si la distancia del incentro al excentro relativo a $\overline{BC}$ es "x" y la distancia del incentro al vértice A es 5 m. Calcule "xº".

17. En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se inscribe un cuadrado PLMN, de modo que el lado $\overline{PN}$ descansa sobre la hipotenusa $\overline{AC}$.
Calcule AC, si : LM = 12 u y AP - NC = 10 u.

18. Se tiene un triángulo ABC, sobre los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ se construyen exteriormente los cuadrados ABPQ y BCMN. Calcule la medida del menor ángulo que determinan $\overline{AN}$ y $\overline{MQ}$.

19. En un triángulo ABC, se trazan las alturas $\overline{AM}$ y $\overline{CN}$, de modo que :
AB = 5 u, NB = 3 u y BC = 6 u. Calcule BM.

20. Se tiene un triángulo ABC, AB = c, BC = a y AC = b; donde la medida del ángulo "A" es dos veces la medida del ángulo "B". Si : b = 4 y c = 5. Calcule : $\frac{a}{b}$.

Problemas propuestos

21. En un triángulo ABC, se trazan las alturas $\overline{BH}$ y $\overline{CN}$; de tal manera que :
AN = 12 u, BN = 4 u y AH = 9 u. Calcule HC.

a) 15 u b) $13,\hat{8}$ u c) 14 u
d) 13,2 u e) $12,\hat{3}$ u

22. Las longitudes de los lados de un triángulo son 4, 7 y 10 cm. Si otro triángulo semejante al primero, tiene un perímetro de 147 cm. Calcule la longitud de su lado menor.

a) 28 cm b) 24 cm c) 32 cm
d) 20 cm e) 48 cm

23. Los lados de un triángulo ABC miden :
BC = 6 u, CA = 8 u, AB = 4u, respectivamente.
Por un punto M de AB se traza la paralela $\overline{MN}$ al lado $\overline{BC}$. Calcule la longitud de AM, de modo que el perímetro del triángulo MAN sea igual al perímetro del trapecio BMNC.

a) 3,5 u b) 2,0 u c) 1,5 u
d) 2,5 u e) 3,0 u

24. En un rombo ABCD, de 12 m de lado, se toma el punto medio M de $\overline{BC}$. $\overline{AM}$ corta a $\overline{BD}$ en G y $\overline{DM}$ a $\overline{AC}$ en H. Calcule GH.

a) 4 m b) 6 m c) $2\sqrt{2}$ m
d) $3\sqrt{2}$ m e) m

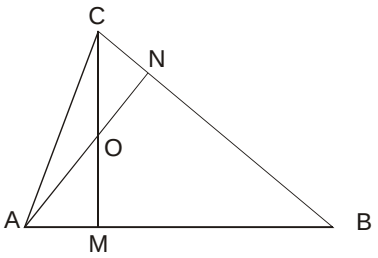
25. En un triángulo rectángulo, la bisectriz del ángulo recto divide a la hipotenusa en dos segmentos cuyas longitudes son $\sqrt{3}$ y 1, respectivamente. El menor de sus ángulos mide :

a) 30º b) 45º c) 18º
d) 60º e) 15º

26. En un triángulo ABC, se cumple que :
$m\sphericalangle BAC = 2m\sphericalangle BCA$; AB = 6 u y AC = 8 u.
Calcule $\overline{BC}$.

a) $3\sqrt{21}$ u b) $\sqrt{21}$ u c) $2\sqrt{21}$ u
d) $2\sqrt{14}$ u e) $3\sqrt{14}$ u

27. En la figura mostrada, el punto "O" es el ortocentro del triángulo ABC; BN = 2u, MB = 3u.
Calcule OC. AB + BC = 10u.



a) $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ u b) $\frac{8}{3\sqrt{3}}$ u c) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ u
d) $\frac{27}{2\sqrt{3}}$ u e) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ u

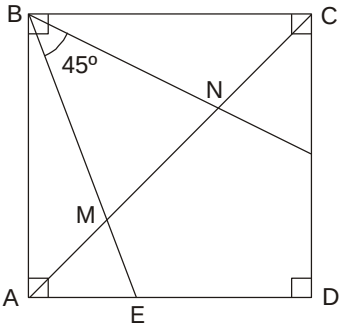
28. Si los radios de dos circunferencias miden 3 y 1 m. La mínima distancia entre los centros es 10 m, entonces la distancia entre el punto de intersección de las tangentes interiores y el punto de intersección de las tangentes exteriores comunes a las dos circunferencias es :

a) 14 m b) 7,5 m c) 7 m
d) 1,2 m e) 6,5 m

29. Por el baricentro G, de un triángulo ABC se traza una recta que corta a $\overline{AB}$ en E y a $\overline{BC}$ en F. Calcule FC.
Si : AE = a, EB = b y BF = c.

a) $\frac{b(a+c)}{a}$ b) $\frac{c(a-b)}{a}$ c) $\frac{c(b-a)}{b}$
d) $\frac{c(b+a)}{b}$ e) $\frac{(b+a)}{b}$

30. En la figura, ABCD es un cuadrado y ED = $3\sqrt{2}$ u. Calcule NC.

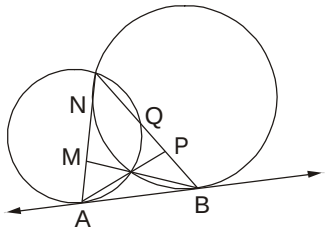


a) $\sqrt{2}$ u b) 2 u c) $2\sqrt{2}$ u
d) 3 u e) $3\sqrt{2}$ u

31. En un triángulo rectángulo AB recto en B, se trazan las bisectrices interiores $\overline{AM}$ y $\overline{CN}$, de tal manera que :
$\frac{1}{AN}+\frac{1}{CM}=5$. Calcule la longitud del radio de la circunferencia inscria en el triángulo ABC.

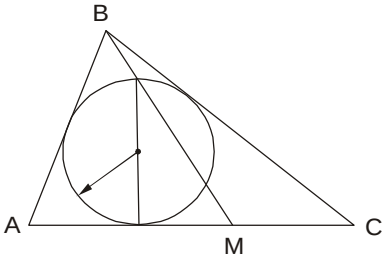
a) $\sqrt{5}$ u b) 1 u c) $\sqrt{2}$ u
d) $\sqrt{3}$ u e) $\frac{1}{5}$ u

32. En la figura, A y B son puntos de tangencia.
Si : MN . PQ = $4\sqrt{2}$ u^2. Calcule : AM . BP.



a) $4\sqrt{2}\,u^2$ b) $8\,u^2$ c) $4\,u^2$
d) $8\sqrt{2}\,u^2$ e) $6\sqrt{2}\,u^2$

33. En la figura mostrada, calcule la relación de los perímetros de los triángulos BAM y BCM respectivamente.



a) 1 b) 2 c) 1/2
d) 1/3 e) 3/4

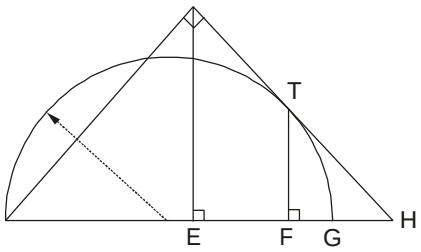
34. En un triángulo ABC, AB = 3u, BC = 12u.
Calcule la longitud de la bisectriz interior BM, si : $m\sphericalangle B = 120°$.

a) 2 u b) 2,4 u c) 4 u
d) 5 u e) 6 u

35. Se tiene un triángulo rectángulo ABC recto en B. Si en $\overline{AB}$ se ubican los puntos P y Q, tal que :
$m\sphericalangle ACP = m\sphericalangle PCQ = m\sphericalangle QCB$; AP = a y PQ = b.
Calcule QB.

a) $\frac{a(a+b)}{2b}$ b) $\frac{2a(a+b)}{b}$ c) $\frac{b}{a}(a+b)$
d) $\frac{b}{a}(2a+b)$ e) $\frac{b(a+b)}{2a}$

36. En el gráfico : EF = 3u, FG = 2u.
Calcule GH, si : "T" es punto de tangencia.



a) 1 u b) 2 u c) 3 u
d) 4 u e) 2,5 u

37. Se tiene un triángulo ABC acutángulo con AC = 12 m. En su interior, desde un punto "F", se trazan las perpendiculares $\overline{FD}$ y $\overline{FE}$ a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. Si : DE = 4 y BF = 6.
Calcule el circunradio del triángulo ABC.

a) 10 m b) 9 m c) 12 m
d) 15 m e) 20 m

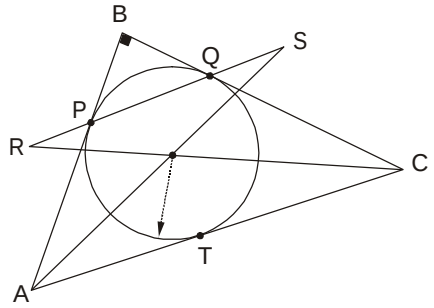
38. Sea ABC un triángulo, donde :
AB + BC = 18 dm y el segmento que une el incentro con el baricentro es paralelo al lado $\overline{AC}$. Calcule AC.

a) 6 dm b) 8 dm c) 9 dm
d) 12 dm e) 16 dm

39. En un triángulo ABC, se trazan 3 cevianas concurrentes $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ y $\overline{CP}$; la prolongación de $\overline{PM}$ intersecta a la prolongación de $\overline{AC}$ en Q.
Si : AN = a y NC = b. Calcule CQ.

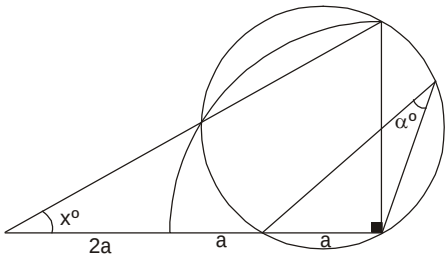
a) $\frac{a(a+b)}{a-b}$ b) $\frac{b(a+b)}{a-b}$ c) $\frac{b(a+b)}{a+2b}$
d) $\frac{a(a+b)}{2a+b}$ e) $\frac{b(a+b)}{2}$

40. En la figura : P, Q, T son puntos de tangencia.
Si : RS = a. Calcule AC.



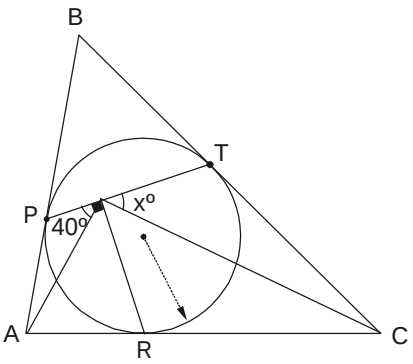
a) a b) 2a c) $a\sqrt{2}$
d) $\sqrt{3a}$ e) 0,75 . a

41. Del gráfico, calcule "xº", en función de "α º".



a) α º b) 2α º c) 3α º
d) 90º - α º e) 90º - 2α º

42. Si : P, T y R son puntos de tangencia en la figura.
Calcule "xº".

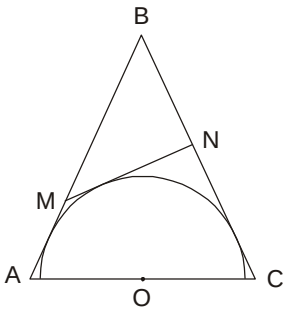


a) 20° b) 30° c) 40°
d) 50° e) 60°

43. En un paralelogramo, en la prolongación de $\overline{AB}$ se ubica el punto E, $\overline{ED}$ interseca a $\overline{BC}$ y a $\overline{AC}$ en M y N respectivamente.
Calcule ED, si : MN = 9 u y ND = 15 u.

a) 20 u c) 16 u d) 40 u
d) 25 u e) 31 u

44. En la figura mostrada, el triángulo ABC es isósceles, "O" es el centro de la semicircunferencia $\overline{MN}$ es tangente a la circunferencia.
Si : AM = a y NC = b. Calcule AC.



a) $\sqrt{ab}$ b) $2\sqrt{ab}$
c) $\sqrt{a^2+b^2}$ d) $\frac{2ab}{a+b}$
e) $\frac{3ab}{a+b}$

45. En un triángulo ABC, se traza la bisectriz $\overline{AE}$ que interseca al lado $\overline{BC}$ en "D". Luego, desde los vértices B, C se trazan las perpendiculares $\overline{BH}$, $\overline{CE}$ a dicha bisectriz. Si: HD = 1 u y DE = 2u. Calcule AH.

a) 5 u b) 4 u c) 3 u
d) 2 u e) 1 u

46. En un triángulo ABC, se ubican los puntos D, E y F en $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{EC}$ respectivamente, tal que : DE = EF, $\overline{AE} \perp \overline{DF}$; $\overline{ED} \perp \overline{AB}$, por B se traza una recta que intersecta perpendicularmente a la prolongación de $\overline{AE}$ en H y a la prolongación de $\overline{AC}$ en G. Si : $EH = \sqrt{2}$ u y AB = BC = $2\sqrt{10}$ u. Calcule BE.

a) $\sqrt{7}$ u b) $2\sqrt{2}$ u c) 3 u
d) $\sqrt{10}$ u e) 4 u

47. En un paralelogramo ABCD, por el vértice A se traza la recta secante a la diagonal $\overline{BD}$ en M, al lado $\overline{BC}$ en N y a la prolongación de $\overline{DC}$ en Q. Si : AM = a y MN = b, calcule NQ.

a) $\frac{a^2-b^2}{b}$ b) $\frac{a^2+b^2}{a}$ c) $\frac{a^2-b^2}{b}$
d) $\frac{a^2-b^2}{a}$ e) $\frac{b^2-a^2}{b}$

48. En un triángulo ABC; se traza la mediana $\overline{AM}$ y sobre ella se ubica el punto P, del cual se trazan las perpendiculares $\overline{PQ}$ y $\overline{PR}$ a $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente.
Calcule PR, si :
PQ = 3u, AB = 9 u y AC = 12 u.

a) 9 u b) 9/2 u c) 9/4 u
d) 9/5 u e) 3 u

49. Dado un cuadrilatéro ABCD inscriptible, se prolongan los lados $\overline{DC}$ y $\overline{AB}$, (se cortan en E) y $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ (se cortan en F). Las bisectrices, los ángulos DFC y BEC se cortan en "O" y M y N son los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ respectivamente.
Calcule la $m\sphericalangle$ MON.

a) 165° b) 160° c) 135°
d) 150° e) 180°

50. En un triángulo ABC, se trazan las cevianas $\overline{BD}$ y $\overline{BF}$, tal que :

$m\sphericalangle ABD = m\sphericalangle DBF = \frac{m\sphericalangle FBC}{3}$.

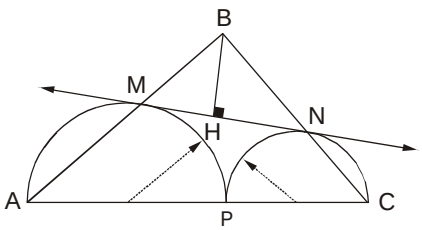
Si : AD = 3 u, DF = 2 u y FC = 10 u.
Calcule la $m\sphericalangle$ DBF.

a) 45º b) 15º c) 22º
d) 45º/2 e) 37º/2

51. En un trapecio rectángulo ABCD, se tiene que :
$m\sphericalangle A = 60°$, $m\sphericalangle C = m\sphericalangle D = 90°$ y BC = CD. En $\overline{AC}$ se ubica el punto F y se traza $\overline{FM} \perp \overline{AD}$ y $\overline{FN} \perp \overline{AB}$.
Calcule : FN, si : FM = 4u.

a) 2 u b) $2\sqrt{3}$ u c) 4 u
d) $4\sqrt{3}$ u e) 8 u

52. En la figura mostrada, calcule MN, si : M, N y P son puntos de tangencia.
BH = 2 u y AC = 18 u.



a) 4 u b) 5 u c) 6 u
d) 8 u e) 9 u

53. La circunferencia inscrita del triángulo ABC es tangente al lado $\overline{AC}$ en "Q", una recta secante al triángulo es tangente a la circunferencia en P, e interseca a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en M y N respectivamente.
$(\overline{MC} \cap \overline{PQ}) = \{F\}$, MP = 4 u, QC = 8 u y FC = 10 u.
Calcule MF.

a) 3 u b) 4 u c) 5 u
d) 6 u e) 8 u

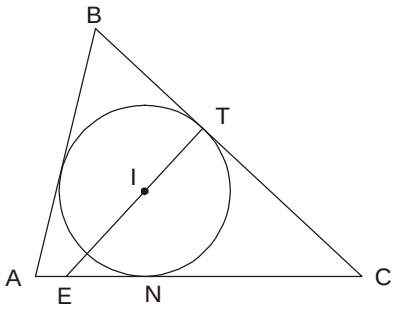
54. En un triángulo ABC (recto en B); la m$\sphericalangle$BAC = 53°, sea P un punto de la región interior de dicho triángulo, tal que :
PA = 15 u, PB = 12u y PC = 20 u.
Calcule AC.

a) $\sqrt{11}$ u b) $\frac{4}{5}\sqrt{5}$ u

c) $\frac{\sqrt{25+6\sqrt{3}}}{5}$ u d) $\frac{\sqrt{25-6\sqrt{3}}}{5}$ u

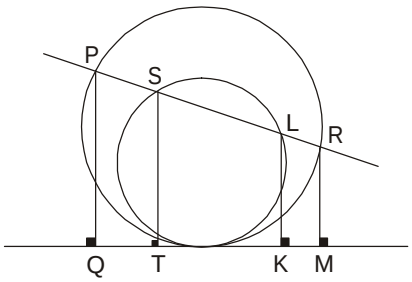
e) $5\sqrt{25+12\sqrt{3}}$ u

55. En el gráfico : AB = 7u, BC = 9 u y AC = 8 u.
Calcule : $\frac{EI}{ET}$.



a) 3/5 b) 3/4 c) 2/5
d) 2/3 e) 5/6

56. De la figura, calcule : PQ . RM, si :
ST . LK = 27 u^2.

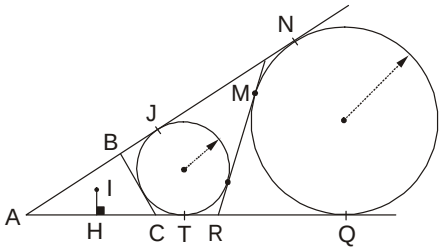


a) 25 u^2 b) 25/2 u^2 c) 27 u^2
d) 27/2 u^2 e) 9 u^2

57. En un trapecio ABCD $(\overline{BC} // \overline{AD}$ y $\overline{BC} < \overline{AD})$, por B se traza una paralela a $\overline{CD}$, que intersecta a $\overline{AC}$ en M y por C se traza una paralela a $\overline{AB}$ que interseca a $\overline{BD}$ en N.
Calcule la longitud del segmento $\overline{MN}$, sabiendo que: BC = 3u, AM = 6u y CM = 4 u.

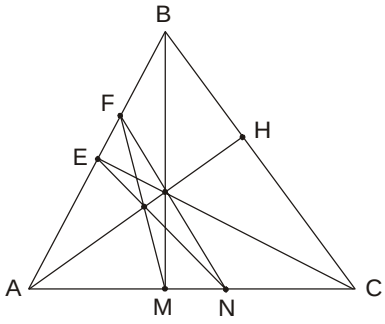
a) 1,40 u b) 1,50 u c) 1,20 u
d) 1,25 u e) 1,35 u

58. Si "I" es el incentro del triángulo ABC, y :
3(AH) = 4(RQ) = 6(CT) = 6(TR) = 12 u. Calcule HC.



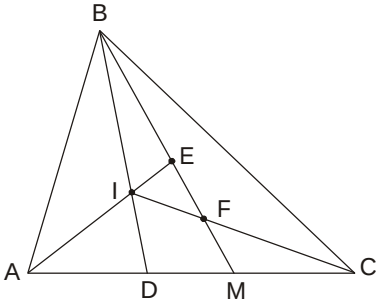
a) 1 u b) 2 u c) 3 u
d) 4 u e) 4/7 u

59. En el gráfico mostrado :
AE = 4 dm, EF = 2 dm, AM = 5 dm y NC = 12 dm.
Calcule la diferencia entre FB y MN.



a) 1 dm b) 2 dm c) 2,5 dm
d) 3 dm e) 4 dm

60. En el gráfico, "I" es el incentro del triángulo ABC y $\overline{BM}$ es una mediana. Si : $\frac{ID}{IB} = \frac{2}{3}$, EB = 6 dm y FM = 4 dm.
Calcular EF.



a) 1 dm b) 1,5 dm c) 2 dm
d) 2,5 dm e) 3 dm

Claves

21.	e
22.	a
23.	e
24.	a
25.	a
26.	d
27.	c
28.	b
29.	c
30.	d
31.	e
32.	a
33.	a
34.	b
35.	e
36.	d
37.	b
38.	c
39.	b
40.	c

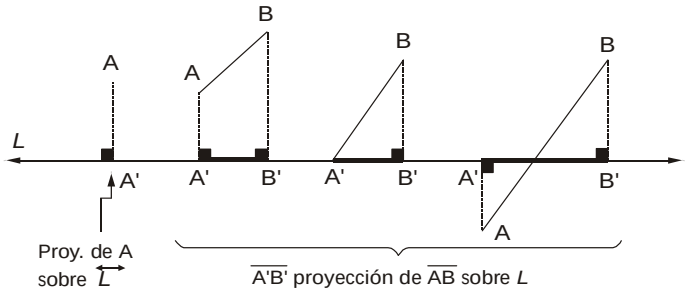
41.	a
42.	c
43.	d
44.	b
45.	c
46.	d
47.	c
48.	c
49.	e
50.	d
51.	b
52.	c
53.	c
54.	e
55.	a
56.	c
57.	c
58.	a
59.	d
60.	c

Capítulo

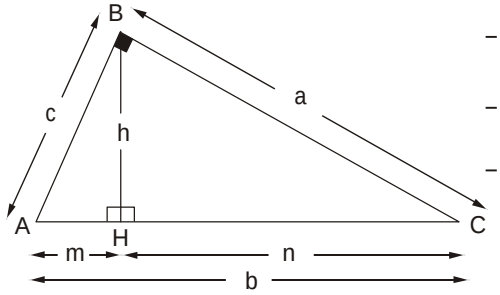
10

RELACIONES MÉTRICAS EN UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO

* ***PROYECCIONES ORTOGONALES SOBRE UNA RECTA***



**



- m : proyección de $\overline{AB}$ sobre $\overline{AC}$
- n : proyección de $\overline{BC}$ sobre $\overline{AC}$
- $\triangle$ AHB ~ $\triangle$ BHC ~ $\triangle$ ABC

I. Un cateto es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre dicha hipotenusa.

$$\frac{c}{b} = \frac{m}{c} \rightarrow \boxed{c^2 = b.m}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{n}{a} \rightarrow \boxed{a^2 = b.n}$$

II. La altura relativa a la hipotenusa es media proporcional entre las proyecciones de los catetos sobre dicha hipotenusa.

$$\frac{h}{m} = \frac{n}{h} \rightarrow \boxed{h^2 = m.n}$$

III. La suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

$$\boxed{c^2 + a^2 = b^2}$$

IV. El producto de los catetos es igual al producto de la hipotenusa con la altura relativa a la hipotenusa.

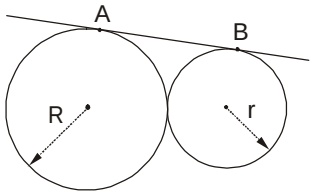
$$\boxed{c \,.\, a = b \,.\, h}$$

V. La suma de los cuadrados de las inversas de los catetos es igual al cuadrado de la inversa de la altura relativa a la hipotenusa.

$$\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{1}{h^2}$$

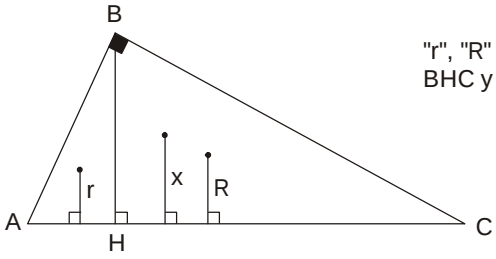
PROPIEDADES

1.



$$AB = 2\sqrt{R.r}$$

2.

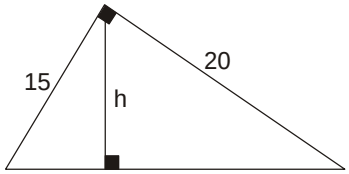


"r", "R" y "x" inradios de los triángulos AHB, BHC y ABC respectivamente.

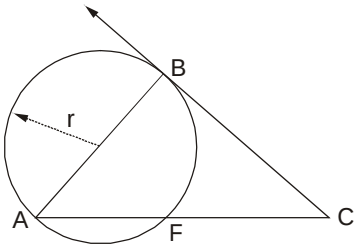
$$x^2 = r^2 + R^2$$

Test de aprendizaje preliminar

01. Calcule "h".

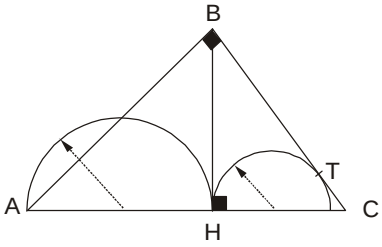


02. En el gráfico, B es punto de tangencia.
AF = 6 dm y AC = 18 cm.
Calcule "r".

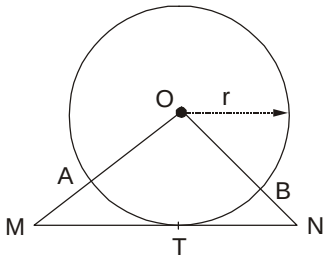


03. La altura de un triángulo rectángulo determina, en la hipotenusa, segmentos de 18u y 32u. Calcule los catetos.

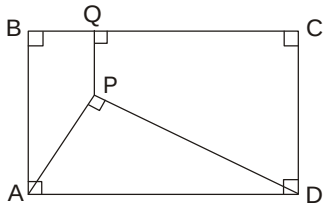
04. Los radios de los semicírculos miden 2,5 dm y 2 dm. Calcule BH. (T : punto de tangencia).



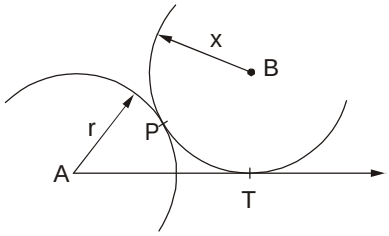
05. Calcule "r", si : MT = 9 cm: TN = 2 cm.
m $\measuredangle$ AOB = 90°. ("T" es punto de tangencia).



06. Calcule PD, si : BQ = 4,5 cm y QC = 8 cm.

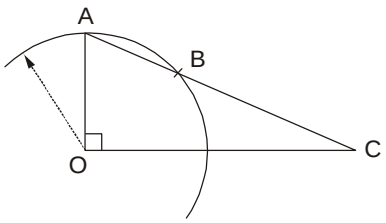


07. P y T son puntos de tangencia.
r = 5 u y AT = 9 u. Calcule "x".

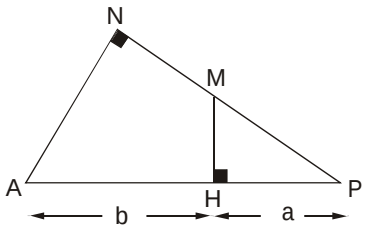


08. En un triángulo obtusángulo ABC obtuso en "B", por el punto medio "M" de $\overline{AC}$ se traza $\overline{MP}$ perpendicular a $\overline{BC}$. Calcule MP, si: AB = 6 u; BP = 3 u y PC = 7 u.

09. En el gráfico : AB = 6 cm y BC = 8 cm.
Calcule la distancia de "O" a $\overline{AC}$.



10. Calcule "AN", si : MN = MP.



Practiquemos :

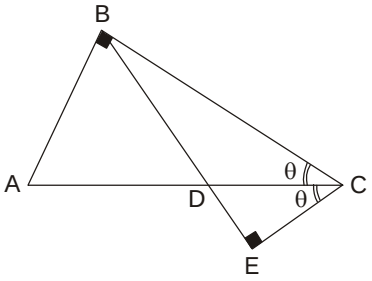
12. Los lados de un triangulo miden 8, 15 y 16 cm. ¿Cuánto se debe quitar a cada lado para que resulte un triángulo rectángulo?

13. La suma de los cuadrados de los lados de un triángulo rectángulo es 200 cm^2.
Calcule la longitud de la hipotenusa.

14. Calcule la longitud de la altura relativa a la hipotenusa, si los catetos del triángulo rectángulo miden 6 y 8 cm.

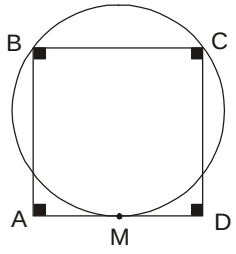
15. En un triángulo rectángulo, los catetos miden 24 u y 18 u. Calcule la longitud de la altura de dicho triángulo.

16. Calcule BD, si : AD = 8 cm y DC = 10 cm.



17. Calcule la longitud del inradio de un triángulo isósceles; si su perímetro es igual a 98 cm y su base es igual a 40 cm.

18. En la figura, ABCD es un cuadrado de lado que mide 16, siendo "M" punto medio de $\overline{AD}$. Calcule la longitud del radio de la circunferencia.



19. Los lados de un triángulo miden 4 u, 5 u y 6 u. ¿Cuánto hay que disminuir a cada lado para que el nuevo triángulo sea triángulo rectángulo?

20. El radio de la circunferencia inscrita en un trapecio isósceles de bases "a" y "b" es :

Problemas propuestos

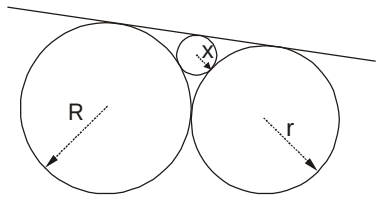
21. En un triángulo PQR (m$\sphericalangle$ Q = 90°), los catetos PQ y QR miden 30 m y 20 m respectivamente. Calcule la distancia del vértice Q a la mediana RM.

a) 8 m b) 9 m c) 10 m
d) 11 m e) 12 m

22. En una circunferencia de 5 m de radio, se traza una cuerda AB y sobre ésta se ubica un punto M, de modo que :
AM = 3m y MB = 5 m. Calcule a qué distancia está M del centro.

a) $\sqrt{10}$ m b) $\sqrt{11}$ m c) $\sqrt{13}$ m
d) $\sqrt{15}$ m e) 3 m

23. Calcule "x", si : R = 16 u y r = 4 u.



a) 16/9 u b) 15/8 u c) 2 u
d) 3/2 u e) 8/3 u

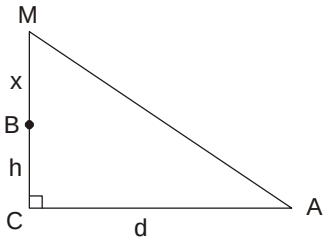
24. El lado de un cuadrado ABCD, inscrito en una circunferencia, mide 4 u. "M" es un punto del arco $\widehat{AB}$, de modo que : MD = 5 u. Calcule MB.

a) $\sqrt{6}$ u b) $\sqrt{5}$ u c) $2\sqrt{2}$ u
d) $\sqrt{7}$ u e) 3 u

25. Dado un rectángulo ABCD, AD = 30 cm y AB = 25 cm, calcule el radio de la circunferencia tangente a $\overline{BC}$ y que contiene a A y D.

a) 16 cm b) 17 cm c) 18 cm
d) 20 cm e) 21 cm

26. En un triángulo rectángulo de la figura, la suma de las longitudes BM y MA es igual a la suma de las longitudes BC y CA. Si : BM = x, BC = h y CA = d. Calcule "x".



a) d - h b) $\frac{hd}{2h+d}$
c) $\frac{d}{2}$ d) $\sqrt{h^2+d^2-h}$
e) $h+d-\sqrt{2}d$

27. Se tiene un cuadrado ABCD cuyo lado tiene una longitud igual a "L". Se traza una circunferencia que, pasando por los vértices B y C, es tangente al lado $\overline{AD}$. Calcule la longitud del radio de la circunferencia.

a) 4L/7 b) 5L/8 c) 3L/5
d) 2L/3 e) 8L/10

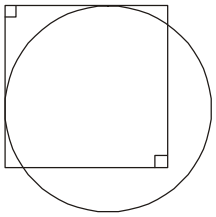
28. En un pentágono ABCDE, los lados $\overline{AE}$ y $\overline{DE}$ miden 16 u y 8 u respectivamente y :
$m\sphericalangle A + m\sphericalangle B + m\sphericalangle C + m\sphericalangle D = 480°$. Calcule la distancia del vértice E a la diagonal $\overline{AD}$.

a) $4\sqrt{3}$ u b) 8 u c) 10 u
d) 12 u e) $3\sqrt{3}$ u

29. Sea ABC un triángulo rectángulo cuyos catetos miden: AB = 40 u y AC = 30 u. Se traza la altura $\overline{AD}$ relativa a la hiptenusa. Calcule la diferencia entre los perímetros de los triángulos ABD y ACD.

a) 24 u b) 30 u c) 48 u
d) 20 u e) 26 u

30. Una circunferencia es tangente a dos lados adyacentes de un cuadrado y divide a cada uno de los otros lados en dos segmentos cuyas longitudes son 2 cm y 23 cm. Calcule la longitud del radio de la circunferencia.



a) 15 cm b) 16 cm c) 17 cm
d) 14 cm e) 19 cm

31. Las medianas de un triángulo rectángulo ABC trazadas a partir de los vértices de los ángulos agudos tienen longitudes de 5 m y $\sqrt{40}$ m. Calcule la longitud de la hipotenusa.

a) 15,0 m b) 13,58 m c) 12,60 m
d) 10,1 m e) 7,21 m

32. En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza la altura $\overline{BH}$; de tal manera que : AH = 5 u y HC = 7 u. Calcule las longitudes de los catetos.

a) $2\sqrt{13}$ u y $2\sqrt{15}$ u b) $2\sqrt{15}$ u y $2\sqrt{21}$ u
c) $3\sqrt{7}$ u y $3\sqrt{5}$ u d) $2\sqrt{5}$ u y $2\sqrt{7}$ u
e) $7\sqrt{2}$ u y $5\sqrt{2}$ u

32. En un triángulo rectángulo, las proyecciones de los dos catetos están en relación de 4 a 5. Calcule la relación de dichos catetos.

a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ c) $\frac{3}{5}$
d) $\sqrt{5}$ e) $\frac{4}{5}$

33. En un romboide ABCD, si :
BC = 8 u, CD = 5 u y AC = 10 u.
Calcule la proyección de $\overline{BD}$ sobre $\overline{AC}$.

a) 1,9 u b) 2,9 u c) 3,9 u
d) 4,9 u e) 5,9 u

34. Sea ABC un triángulo rectángulo recto en B, cuyas medianas $\overline{BM}$ y $\overline{CN}$ son perpendiculares entre sí. Calcule el valor de $\overline{AB}$, si : BC = 6.

a) $3\sqrt{2}$ dm b) $2\sqrt{3}$ dm c) $6\sqrt{2}$ dm
d) $6\sqrt{3}$ dm e) 8 dm

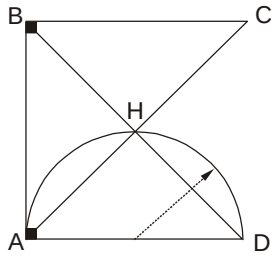
35. En un trapecio ABCD, $\overline{BC} // \overline{AD}$, AB = 5 u, BC = 6 u, CD = 7 u y AD = 10 u.
Calcule : $AC^2 + BD^2$.

a) 192 u^2 b) 193 u^2 c) 194 u^2
d) 195 u^2 e) 196 u^2

36. Calcule la longitud de la hipotenusa $\overline{AB}$ de un triángulo rectángulo ABC, sabiendo que : AD = 2 dm, CD = 7 dm.
$m\sphericalangle DBC = m\sphericalangle BAD$ y que D pertenece a $\overline{AC}$.

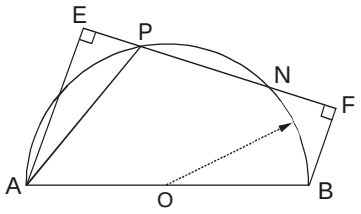
a) 4,5 dm b) 6,5 dm c) $4\sqrt{3}$ dm
d) 10 dm e) 12 dm

37. Calcule AD, si :
CH = 2 dm y HA = 6 dm.



a) $2\sqrt{3}$ dm b) $4\sqrt{3}$ dm c) $8\sqrt{3}$ dm
d) 10 dm e) 12 dm

38. En el gráfico, AE = 80 u y FN = 18 u. Calcule AP.

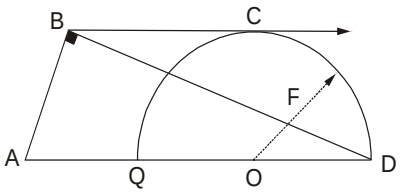


a) 100 u b) $18\sqrt{26}$ u c) 92 u
d) $15\sqrt{33}$ u e) 82 u

39. $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son dos cuerdas paralelas que se encuentran en una circunferencia de radio "r"; de modo que, la distancia entre dichas cuerdas, es igual a 27 u.
Calcule "r", si : AB = 48 u y CD = 30 u.

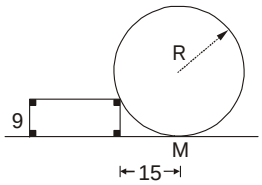
a) 36 u b) 34 u c) 32 u
d) 25 u e) 28 u

40. En el gráfico, calcule BC.
Si : AB = 5 u, AD = 13 u, AQ = QD.
(C : punto de tangencia).



a) $4\sqrt{2}$ u b) $5\sqrt{2}$ u c) $6\sqrt{2}$ u
d) $7\sqrt{2}$ u e) $8\sqrt{2}$ u

41. Calcule "R" en el gráfico mostrado.
(M : punto de tangencia).

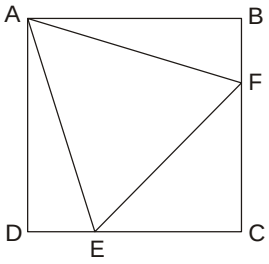


a) 15 u b) 16 u c) 17 u
d) 18 u e) 20 u

42. El segmento perpendicular a un diámetro desde un punto de la circunferencia mide 12 pulgadas. Si uno de los segmentos que se determina, en el diámetro, mide 4 pulgadas. Calcule la longitud del radio de la circunferencia.

a) 5 pulg b) 20 pulg c) 10 pulg
d) 15 pulg e) 25 pulg

43. Dado el cuadrado de lado que mide "a", ¿Cuál debe ser el valor de DE, para que el triángulo AEF sea equilátero?



a) $a(2\sqrt{3})$ u b) $a(\sqrt{3}+1)$ u
c) $a(\sqrt{2}-1)$ u d) $\frac{1}{3}a$ u
e) $a(2-\sqrt{3})$ u

44. Se tiene un triángulo ABC donde la media del ángulo A es dos veces la media del ángulo B.

Si : AC = 4 u y AB = 5 u. Calcule : $\frac{BC}{AC}$.

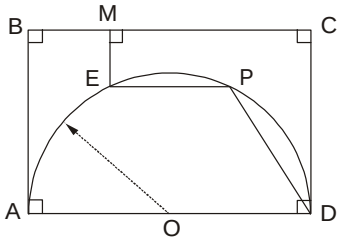
a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{5}{6}$ c) $\frac{6}{5}$

d) $\frac{3}{2}$ e) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

45. Dos circunferencias de centros A y B se intersectan en los puntos C y D. La tangente a la circunferencia de centro A trazada por el punto C pasa por el punto B y la tangente trazada por el punto C a la circunferencia de centro B pasa por el punto A. Si los diámetros de las circunferencias tienen las longitudes de $6\sqrt{5}$ cm y $12\sqrt{5}$ cm.
Calcule CD.

a) 11 cm b) 12 cm c) 13 cm
d) 14 cm e) 15 cm

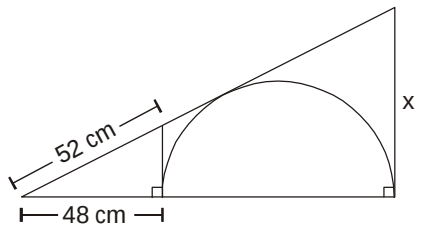
46. En el gráfico : EM = 8 u, MC = 25 u y AB = 18 u.
$\overline{EP} // \overline{AD}$. Calcule PD.



a) $2\sqrt{21}$ u b) 12 u c) $2\sqrt{29}$ u

d) 11 u b) $3\sqrt{15}$ u

47. Calcule "x" en el gráfico :



a) 52 cm b) 48 cm c) 47 cm
d) 46 cm e) 45 cm

48. En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza la altura $\overline{BH}$; de tal manera que:
HA = 3 u y HC = AB. Calcule BC.

a) 5 u b) $\sqrt{6(4+\sqrt{5})}$ u c) 6 u

d) $\sqrt{3}+1$u e) $3\sqrt{2+\sqrt{5}}$ u

49. Se tiene el trapecio rectángulo ABCD,
$m\sphericalangle A = m\sphericalangle B = 90°$, AB = 60 u, BC = 62 u y AD = 73 u. Calcule CD.

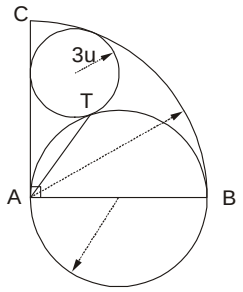
a) 61 u b) 63 u c) 65 u
d) 68 u e) 75 u

50. Las diagonales AC y BD de un trapecio ABCD miden 5 u y 7u, respectivamente. Calcular la longitud de la mediana, si: $\overline{AC} \perp \overline{BD}$.

a) 3 u b) $\frac{\sqrt{74}}{2}$ u c) 4 u

d) $\frac{\sqrt{45}}{2}$ u e) 5 u

51. En el gráfico, calcule AT. (T punto de tangencia).



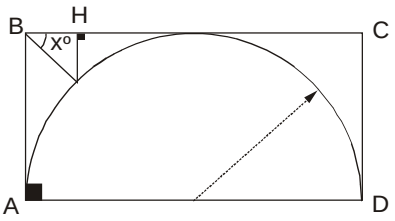
a) $6\sqrt{2}$ u b) $\frac{12\sqrt{21}}{7}$ u c) $9\sqrt{2}$ u

d) $\frac{5\sqrt{17}}{3}$ u e) $6{,}5\sqrt{2}$ u

52. Sea ABCD un cuadrado de 16 dm de lado. Con centros en A y D describa circunferencias congruentes y de radio $\overline{AD}$. Luego, el radio de la circunferencia tangente exteriormente a éstas y al lado $\overline{BC}$ mide :

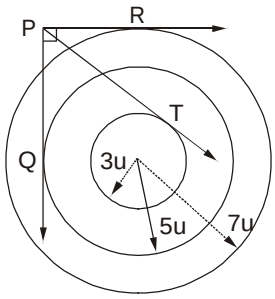
a) 1 dm b) 2 dm c) 3 dm
d) 4 dm e) 5 dm

53. ABCD es un rectángulo.
BH = 2 u, HC = 8 u. Calcule "x".



a) 30° b) 53°/2 c) 37°/2
d) 53° e) 36°

54. En el gráfico, calcule PT.
(T, Q y R son puntos de tangencia).

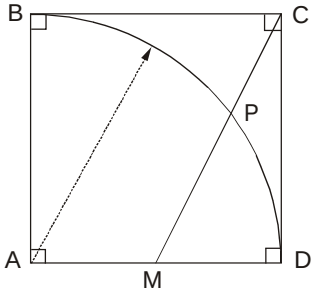


a) 8 u b) $6\sqrt{2}$ u c) 9 u
d) $\sqrt{65}$ u e) 10 u

55. Se tiene un trapecio isósceles, una de sus diagonales mide $2\sqrt{79}$ unidades y el producto de las longitudes de sus bases es igual a 216 u^2. Calcule la longitud de uno de los lados no paralelos.

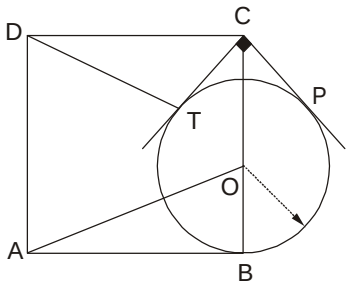
a) $\sqrt{79}$ u b) 12 u c) $6\sqrt{2}$ u
d) 10 u e) $4\sqrt{5}$ u

56. En el gráfico : AB = 8 u. Calcule PM. (AM = MD)



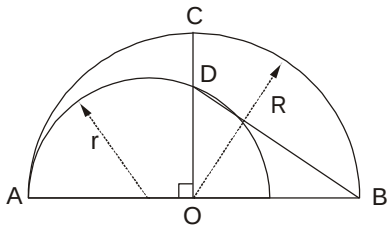
a) 1 u b) $6\sqrt{5}$ u c) $\frac{12}{5}\sqrt{5}$ u
d) $3\sqrt{5}$ u e) $12\sqrt{5}$ u

57. En el gráfico mostrado, ABCD es un cuadrado. Calcule AO, si : DT = 3 m. (P y T punto de tangencia).



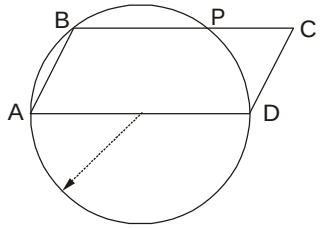
a) 3 m b) 4 m c) 5 m
d) $5\sqrt{2}$ m e) $3\sqrt{2}$ m

58. Calcule BD, si : OA = OB y el producto de radios es 32 m^2.



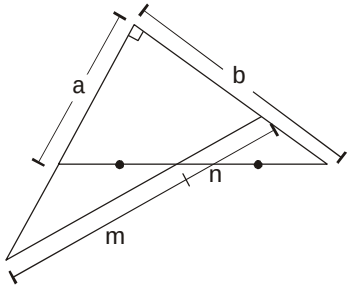
a) 6 m b) 4 m c) 9 m
d) 8 m e) 7 m

59. En el gráfico, ABCD es un romboide, PB = 10 u y PC = 8u . Calcular la longitud de la diagonal BD.



a) 12 u b) $8\sqrt{2}$ u c) 15 u
d) $4\sqrt{6}$ u e) $6\sqrt{7}$ u

60. En el gráfico mostrado, calcule : $\frac{a^2}{n^2}+\frac{b^2}{m^2}$



a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

Claves

21.	e
22.	a
23.	a
24.	d
25.	b
26.	b
27.	b
28.	b
29.	a
30.	c
31.	e
32.	b
33.	b
34.	c
35.	c
36.	a
37.	e
38.	e
39.	d
40.	c

41.	c
42.	b
43.	e
44.	d
45.	b
46.	c
47.	e
48.	e
49.	a
50.	b
51.	c
52.	a
53.	b
54.	d
55.	d
56.	c
57.	e
58.	d
59.	e
60.	d

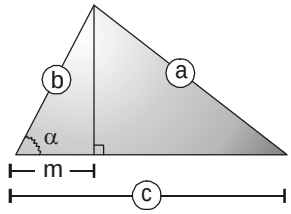
Capítulo

11

RELACIONES MÉTRICAS EN CUALQUIER TRIÁNGULO

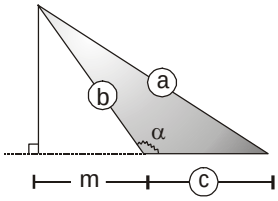
I. TEOREMA DE EUCLIDES

Primer Caso ($\alpha < 90°$)



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cm$$

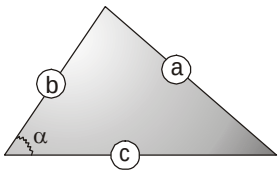
Segundo Caso ($\alpha > 90°$)



$$a^2 = b^2 + c^2 + 2cm$$

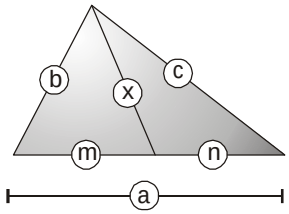
Observaciones :

De aquí, se deduce la importante relación denominada "Ley de Cosenos", que es válida para todo triángulo.



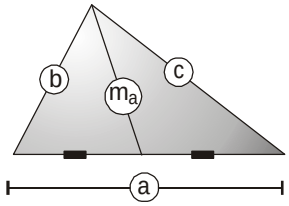
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cb.Cos\alpha$$

II. TEOREMA DE STEWART



$$x^2.a = b^2.n + c^2.m - mna$$

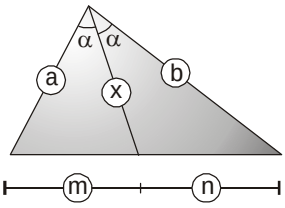
III. TEOREMA DE LA MEDIANA



$$2m_a^2 + \frac{a^2}{2} = b^2 + c^2$$

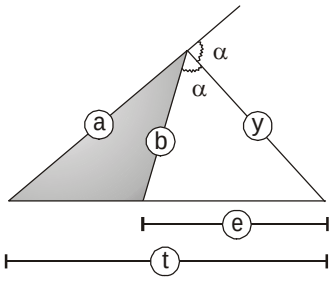
IV. CÁLCULO DE LA BISECTRIZ

**** Interior***



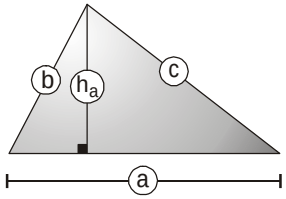
$$x^2 = a.b - m.n$$

**** Exterior***



$$y^2 = t.e - a.b$$

V. CÁLCULO DE LA ALTURA (Teorema de Herón)



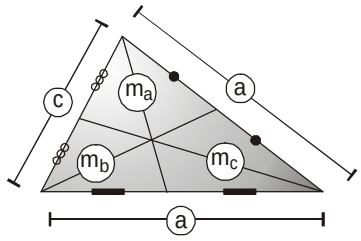
Semiperímetro : p

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

$$h_a = \frac{2}{a}.\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

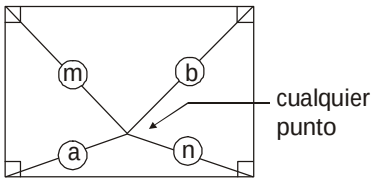
Observaciones

**** En todo triángulo***



$$\frac{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{3}{4}$$

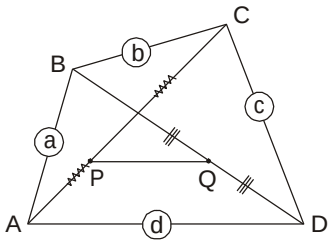
**** En el rectángulo***



$$a^2 + b^2 = m^2 + n^2$$

VI. TEOREMA DE LEONARD EULER

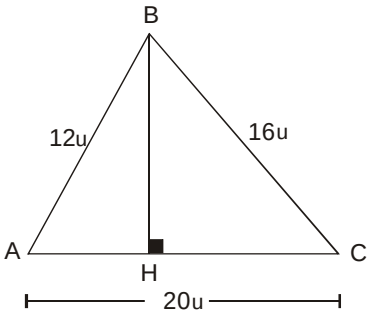
* Válido para todo cuadrilátero.



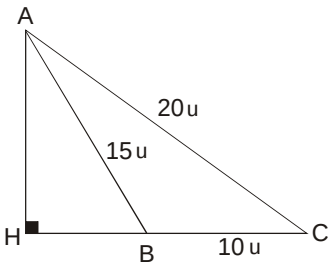
$\overline{PQ}$: segmento que une los puntos medios de las diagonales.

Test de aprendizaje preliminar

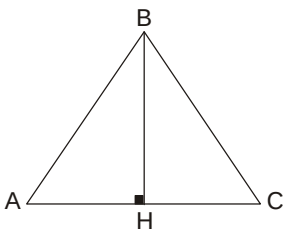
01. Calcule HC.



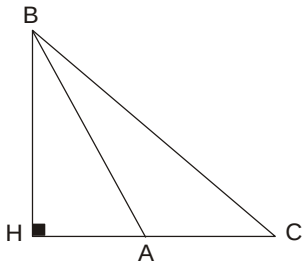
02. Calcule HB.



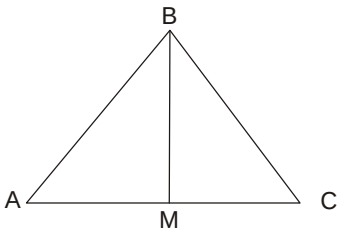
03. Calcule AH, si : AB = 37 u, BC = 15 u y AC = 44 u.



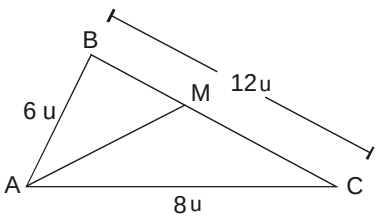
04. Calcule HA, si : AB = 17 u, BC = 25 u y AC = 12 u.



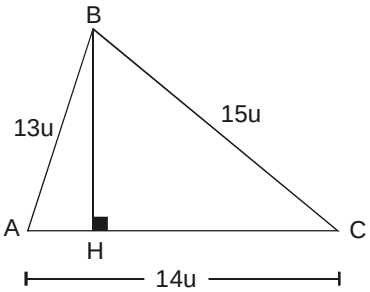
05. Calcule la mediana BM.
Si : AB = 8 u, BC = 12 u y AC = 6 u.



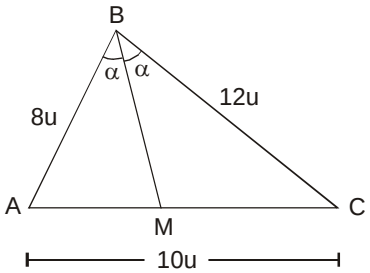
06. Si : BM = MC, calcule AM.



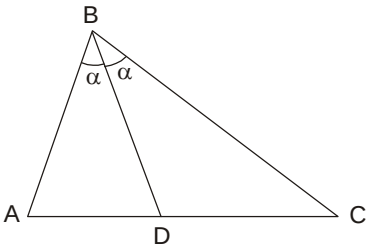
07. Calcule BH.



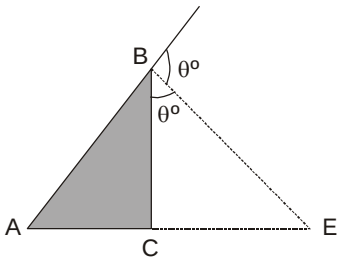
08. Calcule BM.



09. Calcule BD, si : AB = 4 u, BC = 6 u y AC = 5 u.

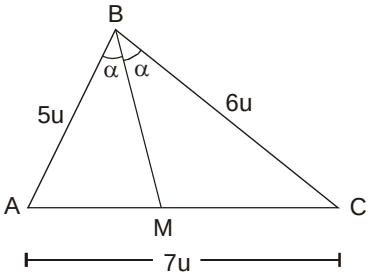


10. Calcule BE, si : AB = 4 u, BC = 3 u y AC = 2 u.

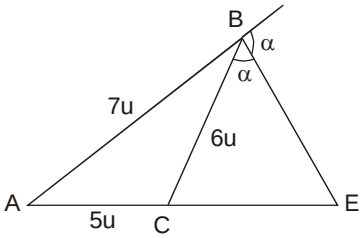


Practiquemos :

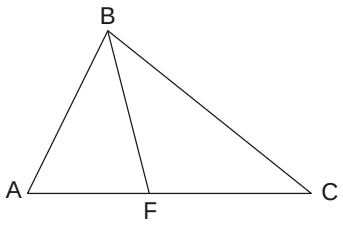
11. En el gráfico, calcule BM.



12. En el gráfico, calcule BE.



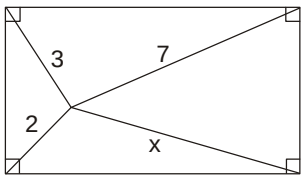
13. En el gráfico, calcule BF, si :
AB = 5 u, BC = 7 u, AF = 4 u y FC = 2 u.



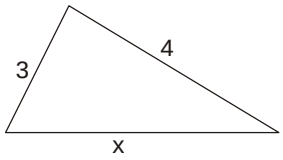
14. Calcule el lado de un rombo, sabiendo que el punto medio de un lado, dista de los extremos del lado opuesto 9 cm y 13 cm.

15. En un triángulo ABC de lados : AB = 13 u, BC = 15 u y AC = 14 u, se traza la bisectriz interior del ángulo C. Calcule AH, siendo $\overline{BH}$ la perpendicular trazada a dicha bisectriz.

16. Calcule "x".



17. ¿Para qué valores enteros de "x", el triángulo mostrado es obtusángulo?



18. Calcule el perímetro de un rombo ABCD, si : MC = 9u, MD = 13 u y M es punto medio de $\overline{AB}$.

19. En un triángulo ABC. AB = c, BC = a y AC = b.

$$a^2 = b^2 + c^2 + \sqrt{3}bc$$

Calcule la m$\sphericalangle$ BAC.

20. Los lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ miden 13 u, 14 u y 15 u respectivamente. Calcule la distancia del punto medio de $\overline{BC}$ al lado $\overline{AC}$.

Problemas propuestos

21. En un triángulo de lados 9 u, 10 u y 13 u. Calcule el valor entero de una de las medianas.

a) 8 u b) 9,0 u c) 12 u
d) 10 u e) 7,0 u

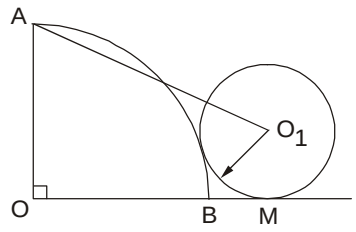
22. Los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ de un triángulo miden 8 u, 10 u y 12 u respectivamente. Por "B" se traza una ceviana $\overline{BE}$ que divide al lado $\overline{AC}$ en dos segmentos, AE = 9 u y EC = 3 u. Calcule BE.

a) 4 u b) 5 u c) 6 u
d) 7 u e) 8 u

23. Los lados de un triángulo rectángulo miden AB = 36 m, AC = 48 cm y BC = 60 m, se traza la altura $\overline{AH}$ y la bisectriz $\overline{BP}$ que corta a la altura en "Q". Calcule AQ.

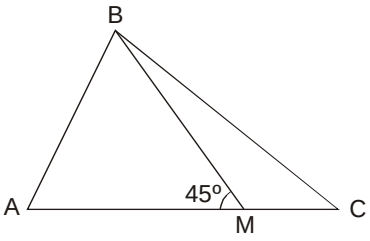
a) 14 m b) 16 m c) 18 m
d) 20 m e) 22 m

24. En el gráfico : $AO_1 = 7$ u y el radio de la circunferencia pequeña mide 3 u. Calcule el radio del cuadrante AOB.



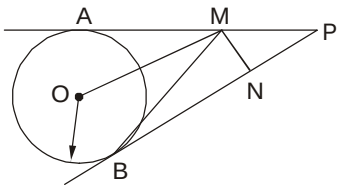
a) $2\sqrt{3}$ u b) $2\sqrt{5}$ u c) 5 u
d) 6 u e) $3\sqrt{5}$ u

25. Calcule AB, si : AM = a y MC = b. (AB = BC).



a) $\sqrt{a^2 - b^2}$ b) $2\sqrt{ab}$
c) a - b d) $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$
e) $\sqrt{a^2 + b^2 - ab}$

26. Calcule BM, si : $\overline{OM} // \overline{BP}$.
AM = 4 u, MP = 5 u y MN = 3 u.



a) $\sqrt{29}$ u b) 5,8 u c) $4\sqrt{3}$ u
d) 6 u e) $\sqrt{34}$ u

27. Calcule la longitud del segmento que une los puntos medios de las bases de un trapecio, sabiendo que los lados laterales miden 5 cm y 7 cm y las bases se diferencian en 6 cm.

a) $2\sqrt{5}$ cm b) $2\sqrt{7}$ cm c) $3\sqrt{5}$ cm
d) $3\sqrt{7}$ cm e) $2\sqrt{11}$ cm

28. En un triángulo ABC, se trazan la bisectriz interior BD y la mediana BM, tal que :
BD = DM. Calcule AC, si:
AB . BC = 144 cm^2.

a) 18 cm b) 20 cm c) 24 cm
d) 28 cm e) 30 cm

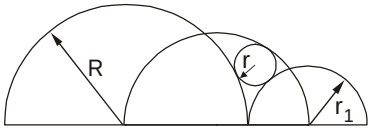
29. Calcule la altura de un trapecio ABCD de bases BC = 5u y AD = 26 u y cuyos lados no paralelos miden 13 u y 20 u.

a) 8 u b) 10 u c) 12 u
d) $6\sqrt{2}$ u e) $6\sqrt{3}$ u

30. Se ubica un punto "P" de la circunferencia inscrita en un cuadrado ABCD de 4 cm de lado.
Calcule : $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2$.

a) 40 cm^2 b) 36 cm^2 c) 48 cm^2
d) 60 cm^2 e) 70 cm^2

31. En el gráfico, calcule "r", si : R = 4 u, $r_1 = 2$ u.



a) 1 u b) 2/3 u c) 3/2 u
d) 2 u e) 1/2 u

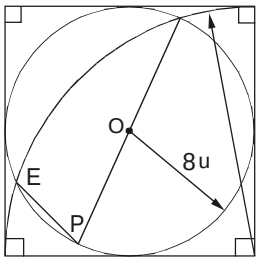
32. En un rectángulo ABCD, se ubica un punto exterior relativo al lado BC, "P", si :
PA = 7 u, PB = 5 u, PD = 6 u. Calcule PC.

a) $3\sqrt{2}$ u b) 3 u c) $3\sqrt{3}$ u
d) $2\sqrt{5}$ u e) $2\sqrt{3}$ u

33. En un triángulo ABC, exteriormente relativo a $\overline{BC}$, se ubica "P", tal que :
$m\sphericalangle APB = 90°$ y $m\sphericalangle BAP = m\sphericalangle PAC$, si :
BC = 5 u. Calcule : AB - AC, siendo :
$PB^2 + PC^2 = 20\ u^2$

a) $\sqrt{7}$ u b) $\sqrt{15}$ u c) $\sqrt{10}$ u
d) $\sqrt{30}$ u e) $\sqrt{2}$ u

34. En el gráfico, calcule EP.

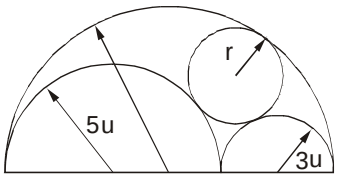


a) 6 u b) $2\sqrt{2}$ u c) 5 u
d) $4\sqrt{2}$ u e) 4 u

35. Se tiene el triángulo ABC :
$m\sphericalangle A = 2m\sphericalangle B$, AB = 12 u y AC = 8 u. Calcule BC.

a) 10 u b) $8\sqrt{2}$ u c) $4\sqrt{15}$ u
d) 13 u e) $4\sqrt{10}$ u

36. En el gráfico, calcule "r".



a) 2 u b) $\frac{120}{49}$ u c) $\sqrt{5}$ u
d) $\frac{33}{15}$ u e) $\sqrt{6}$ u

37. En un triángulo ABC, sobre $\overline{BC}$ se marcan M y N, tal que : BM = MN = NC. Si :
AB = 7 u, AC = 8 u y BC = 9u.
Calcule : $AM^2 + AN^2$.

a) 77 u^2 b) 66 u^2 c) 44 u^2
d) 88 u^2 e) 55 u^2

38. Sobre el lado BC de un rombo ABCD se ubica el punto medio M, de tal manera que :
$(AM)^2 + (MD)^2 = 40\ u^2$.
Calcule el perímetro de la región rombal.

a) 40 u b) 32 u c) 28 u
d) 20 u e) 16 u

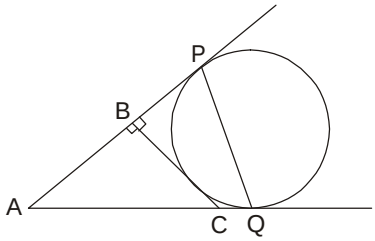
39. En un triángulo ABC, se traza una paralela por B a $\overline{AC}$. La bisectriz interior del ángulo A corta a dicha paralela en E. Calcule AE, si : AB = 5 u, BC = $4\sqrt{2}$ u y AC = 7 u.

a) $4\sqrt{5}$ u b) $3\sqrt{5}$ u c) $\sqrt{5}$ u
d) $5\sqrt{5}$ u e) $2\sqrt{5}$ u

40. Si se sabe que las longitudes de los lados de un triángulo ABC, satisfacen la siguiente relación :
$AC \cdot AB = BC^2 - AC^2$. Calcule la $m\sphericalangle BAC$, si la $m\sphericalangle ABC = 36°$.

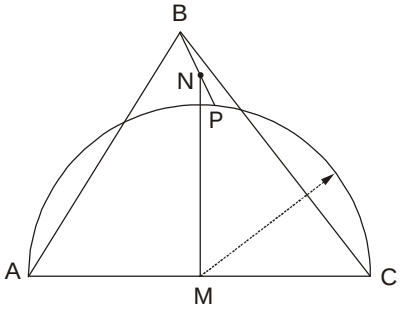
a) 36° b) 72° c) 58°
d) 49° e) 38°

41. En el gráfico, AB = 12 dm y BC = 5 dm.
Calcule PQ.



a) $\frac{5}{3}\sqrt{13}$ dm b) $\frac{2}{3}\sqrt{29}$ dm c) $\frac{15}{16}\sqrt{26}$ dm
d) $\frac{15}{13}\sqrt{26}$ dm e) $\frac{20}{13}\sqrt{11}$ dm

42. En el gráfico, se tiene el triángulo equilátero ABC, AB = 12 u y BP = 5 u. Calcule MN, siendo N punto medio de $\overline{BP}$.



a) $\sqrt{87}$ u b) $\frac{\sqrt{263}}{2}$ u c) $2\sqrt{38}$ u
d) 20 u e) $2\sqrt{10}$ u

43. En un triángulo ABC, obtuso en "C" :
AB = c, BC = a y AC = b.
Calcule la m$\sphericalangle$ ACB, sabiendo que :

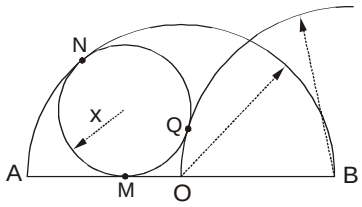
$$a^4 + b^4 + c^4 = 2c^2(a^2 + b^2)$$

a) 120° b) 150° c) 115°
d) 105° e) 135°

44. En un triángulo, dos lados miden $\sqrt{7}$ dm y $\sqrt{3}$ dm, las medianas relativas a dichos lados son perpendiculares entre sí. Calcule la distancia del baricentro al vértice común de dichos lados.

a) $\sqrt{2}$ dm b) 2 dm c) $\sqrt{5}$ dm
d) $\frac{4}{3}\sqrt{2}$ dm e) $\sqrt{6}$ dm

45. En el gráfico, AB = 8 dm, calcule "x".
(M, N y Q son puntos de tangencia).

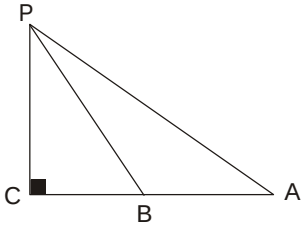


a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ dm b) $\sqrt{2}$ dm c) $\sqrt{3}$ dm
d) $\frac{4}{3}\sqrt{3}$ dm e) 2 dm

46. Sea ABCD un romboide donde :
BC = 3(AB) y M es punto medio de $\overline{BC}$.
Calcule CD, si: AM = 9 dm y DM = 6 dm.

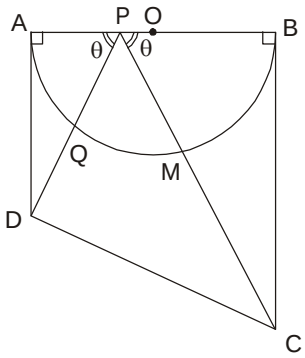
a) $2\sqrt{3}$ dm b) $3\sqrt{2}$ dm c) $4\sqrt{2}$ dm
d) $4\sqrt{3}$ dm e) $6\sqrt{2}$ dm

47. Calcule la longitud de la hipotenusa $\overline{AP}$, sabiendo que :
PB = 11 u, CB = 7 u, BA = 8 u.



a) 16 u b) 17,8 u c) $\sqrt{297}$ u
d) $\sqrt{295}$ u e) 19,5 u

48. En el gráfico, calcule la longitud del segmento $\overline{CD}$, si :
$\overline{AB}$ es el diámetro de la semicircunferencia.
AP = 3 u, PB = 8 u, PQ = 4 u y PM = 6 u.



a) $\sqrt{876}$ u b) $\frac{1}{2}\sqrt{1009}$ u c) $\sqrt{935}$ u
d) $\frac{1}{2}\sqrt{1022}$ u e) $\sqrt{984}$ u

49. Sea ABCD un cuadrilátero donde $\hat{C}$ es recto, AB = 13 cm, BC = 20 cm, CD = 10 cm, AD = 17 cm.
Calcule la longitud de la proyección de $\overline{AD}$ sobre la recta que contiene al segmento $\overline{AB}$.

a) $\frac{20}{17}$ cm b $\frac{10}{13}$ cm c) $\frac{15}{17}$ cm
d) $\frac{21}{13}$ cm e) $\frac{20}{13}$ cm

50. En un triángulo ABC, los lados están representados por tres números enteros consecutivos y el ángulo mayor es doble del menor.
Calcule los lados del triángulo.

a) 2u, 3u y 4u b) 7u, 8u y 9u
c) 6u, 7u y 8u d) 5u, 6u y 7u
e) 4u, 5u y 6u

51. En el tirángulo rectángulo ABC, recto en A, los puntos P_1, P_2, P_3 y P_4, dividen a la hipotenusa en cinco partes iguales.
$AP_1^2 = 265\ u^2$ y $AP_4^2 = 160\ u^2$. ¿Cuánto mide la hipotenusa?

a) 12 u b) 15 u c) 18 u
d) 21 u e) 25 u

52. Sea un triángulo ABC de lados AB = AC y BC = $\sqrt{2}$ u. Si la bisectriz del ángulo B corta al lado opuesto en D y BD = 1 u; entonces, los ángulos A y B miden :

a) 60°, 60° b) 90°, 45°
c) 100°, 40° d) 120°, 30°
e) 150°, 15°

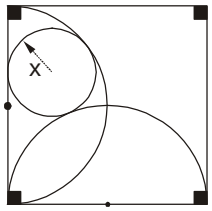
53. En un triaángulo ABC, se cumple que :
m∢BAC = 2m∢BCA; AB = 6 u y AC = 8 u.
Calcule BC.

a) $3\sqrt{21}$ u b) $\sqrt{21}$ u c) $2\sqrt{21}$ u
d) $2\sqrt{14}$ u e) $3\sqrt{14}$ u

54. En un trapecio, las bases miden 6 u y 16 u, los otros dos lados miden 7 u y 9 u. Calcule la longitud del segmento que une los puntos medios de las bases.

a) 6 u b) $2\sqrt{10}$ u c) 7 u
d) $3\sqrt{5}$ u e) $\frac{11}{2}$ u

55. Calcule "x", si la longitud del lado del cuadrado es 18 m.



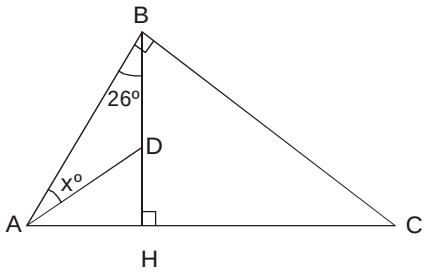
a) 1 m b) 2 m c) 3 m
d) 4 m e) 6 m

56. Calcule la longitud del circunradio de un triángulo cuyos lados miden 26 dm, 28 dm y 30 dm.

a) 16,125 dm b) 16,25 dm
c) 16,89 dm d) 18 dm
e) 20 dm

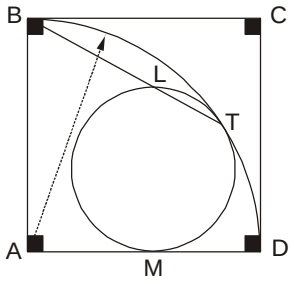
57. En el gráfico, calcule "xº", si :

$$(AB)^2 = (AD)(BC)$$



a) 34° b) 17° c) 23°
d) 26° e) 38°

58. En el gráfico, calcule el lado del cuadrado ABCD. Si : AM = a y BL = b.
(M y T son puntos de tangencia).

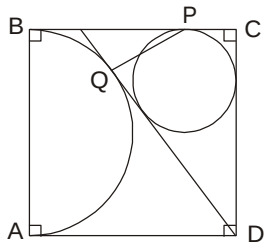


a) $\frac{a^2}{\sqrt{b^2-a^2}}$ b) $\frac{a^2}{\sqrt{2a^2-b^2}}$

c) $\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ d) $\frac{a^2b}{(a+b)(a-b)}$

e) $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$

60. Si ABCD es un cuadrado de lado que mide 40u.
Calcule PQ.
(P y Q : puntos de tangencia).



a) $2\sqrt{61}$u b) $2\sqrt{63}$ u c) $2\sqrt{65}$u
d) $2\sqrt{69}$ u e) $2\sqrt{77}$ u

Claves

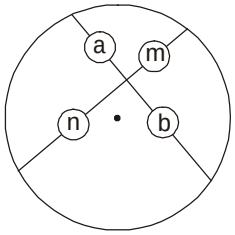
21.	d
22.	c
23.	c
24.	b
25.	d
26.	e
27.	b
28.	c
29.	c
30.	e
31.	b
32.	e
33.	b
34.	d
35.	e
36.	b
37.	a
38.	e
39.	a
40.	b

41.	d
42.	b
43.	e
44.	a
45.	c
46.	b
47.	c
48.	b
49.	d
50.	e
51.	e
52.	d
53.	c
54.	b
55.	d
56.	b
57.	e
58.	e
59.	c
60.	c

Capítulo

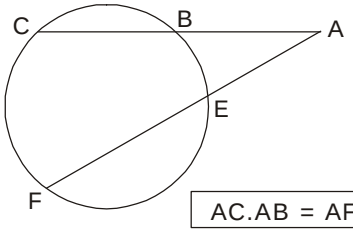
12 RELACIONES MÉTRICAS EN LA CIRCUNFERENCIA

I. TEOREMA DE CUERDAS



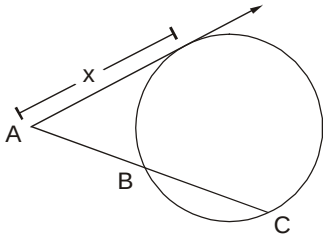
$$a.b = m.m$$

II. TEOREMA DE LAS SECANTES



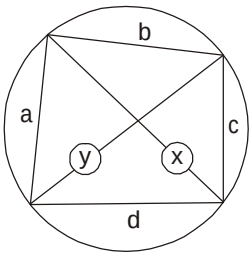
$$AC.AB = AF.AE$$

III. TEOREMA DE LA TANGENTE



$$x^2 = AC.AB$$

IV. CUADRILÁTERO INSCRITO

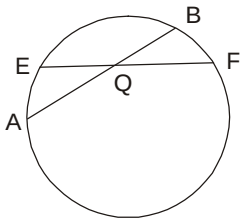


$$xy = ac + bd$$ Ptolomeo

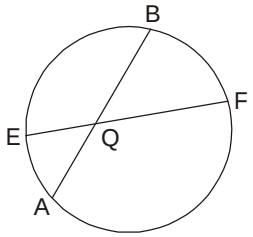
$$\frac{x}{y} = \frac{ab + cd}{ad + bc}$$ Viette

Test de aprendizaje preliminar

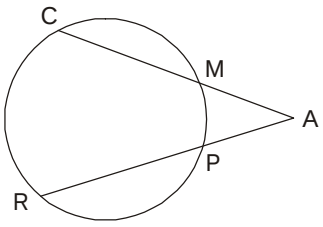
01. Si : AQ = QB; EQ = 4 u y QF = 9 u.
Calcule : AB.



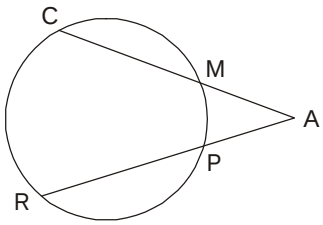
02. Si : AQ = QB; EQ = 12 u y QF = 27 u.
Calcule : AB.



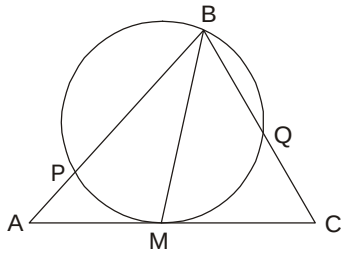
03. En la figura, calcule AC, si :
MC = 2 u, AR = 8 u y PR = 5 u.



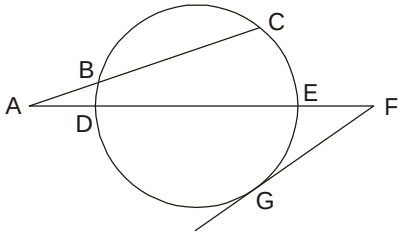
04. En la figura, calcule AC.
Si : MC = 4 u, AR = 16 u y PR = 10 u.



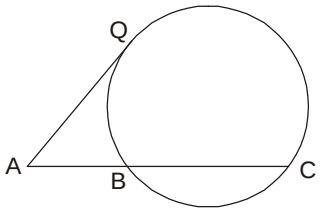
05. Del gráfico : AM = MC. Calcular BQ.
Siendo : AP = 4 u, PB = 5 u y QC = 3 u.



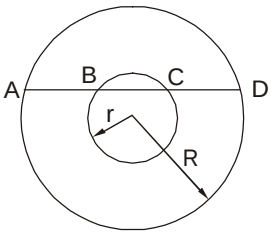
06. Si : AB = 3 u; BC = EF; AD = 2 u; DE = 10 u.
Calcule : FG.



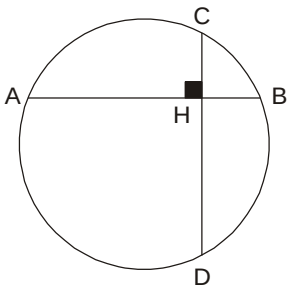
07. Si : AB, BC y AQ son valores enteros consecutivos. Calcule AQ.
Q $\rightarrow$ punto de tangencia.



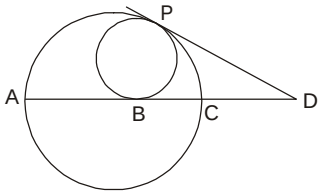
08. Si : AB = BC = CD. Calcule AD, si :
R = 9 u y r = 7 u.



09. En la figura, calcule BD, si :
AH = 8 u, CH = 6 u y HB = 3 u.

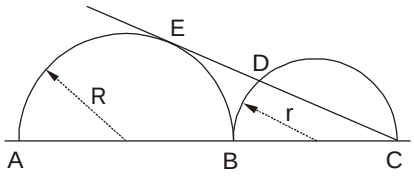


10. Siendo P y B puntos de tangencia. Calcule CD, si :
AB = 4 u y BC = 3 u.

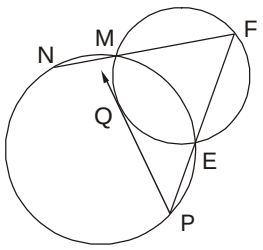


Practiquemos :

11. Si : CD = DE = 3 u. Calcule AC.

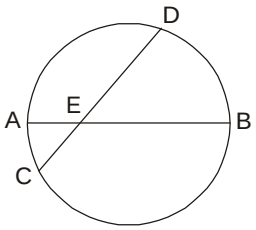


12. Si Q es punto de tangencia.
MN = 9 u; MF = 16 u y 4EP = EF.
Calcule : PQ.

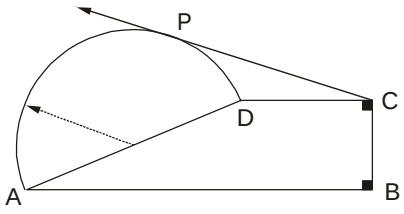


13. Por un punto interior a una circunferencia de radio 10u, se trazan las cuerdas cumpliéndose que el producto de los 4 segmentos determinados es 625. Calcule la distancia entre el punto mencionado hacia el centro de la circunferencia.

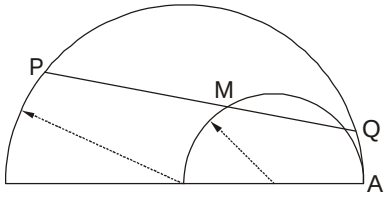
14. Se tiene una circunferencia de diáemtro AB = 6 m, se traza una cuerda $\overline{CD}$ que corta al diámetro en E y forma un ángulo de 30° con éste. Si la distancia de E al centro es de 2 m. ¿Cuánto mide CD?



15. Calcule PC, si : CD = 3 u y AB = 12 u.
"P" es punto de tangencia.



16. En el gráfico, PM = 9 u, MQ = 4 u.
Calcule AM.



17. En una circunferencia se trazan $\overline{AB}$ y $\overline{EF}$ dos cuerdas secantes en Q, de modo que $\overline{EF}$ biseca a $\overline{AB}$. Si $\overline{EQ}$ y $\overline{EQ}$ miden 8 u y 18 u en ese orden. Calcular el valor de $\overline{AB}$.

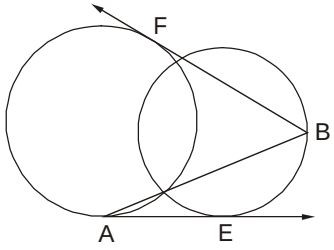
18. Sobre el arco AB de una circunferencia circunscrita a un triángulo equilátero ABC, se ubica un punto P, tal que :
AP = 3 u y PB = 5 u. Calcule : AB + PC.

19. En un triángulo acutángulo ABC se trazan las alturas $\overline{AH}$ y $\overline{CE}$, tal que :
BE = 2 u, CH = 3 u y BH = 5 u. Calcule AE.

20. Se tiene el trapecio ABCD ($\overline{BC} // \overline{AD}$) isósceles, tal que : $AC^2 - CD^2 = 4\sqrt{5}\,u^2$.
Calcule el producto de las bases.

Problemas propuestos

21. E y F son puntos de tangencia.
Marcar la relación correcta :



a) $AB^3 = AE^3 + BF^3$

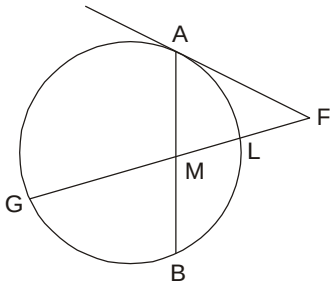
b) $AB^2 = AE^2 + BF^2$

c) $AB^2 = AE.BF$

d) $AB = \dfrac{AE.BF}{AE + BF}$

e) $AB = \dfrac{2AE.BF}{AE + BF}$

22. En la figura, A es punto de tangencia.
AF = BM = MB.
Calcule AM, si : FL = 1 u, LG = 8 u.

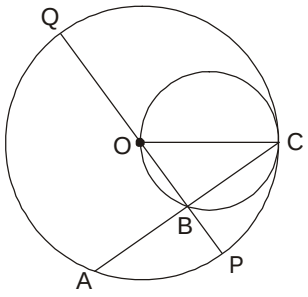


a) 2 u b) 3 u c) 4 u
d) 5 u e) 6 u

23. En un triángulo ABC $m\sphericalangle ABC = 60°$, cuyo incentro es "I" y AB + BC = 12 u.
Calcule OB. (O circuncentro del triángulo AIC).

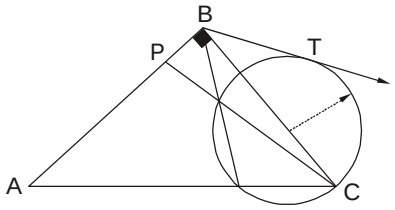
a) $6\sqrt{3}$ u b) 6 u c) 12 u
d) 4 u e) $4\sqrt{3}$ u

24. En la figura, calcule AB, si :
PB = 3 u y BQ = 12 u.
(O es centro y C punto de tangencia).



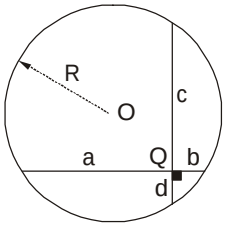
a) 2 u b) 4 u c) 5 u
d) 6 u e) 8 u

25. En el gráfico : AP = 8 u, PB = 1u y $m\sphericalangle ABC = 90°$.
Calcule BT.



a) $4\sqrt{2}$ u b) 3 u c) 3,5 u
d) $2\sqrt{2}$ u e) 2 u

26. Indicar el valor de verdad de las siguientes relaciones, $(O \neq Q)$.



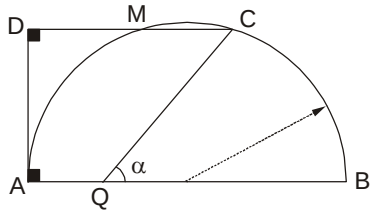
I. $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$

II. $\dfrac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{R^2} = 4$

III. $2R \leq a + c$

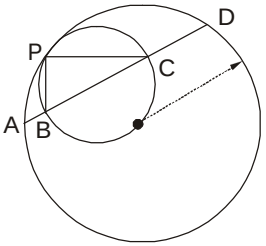
a) FFF b) VVF c) VVV
d) FVV e) FFV

27. En el gráfico :
MC = 12 u y QC = $8\sqrt{2}$ u y $\alpha°$ = 45º. Calcule DM.



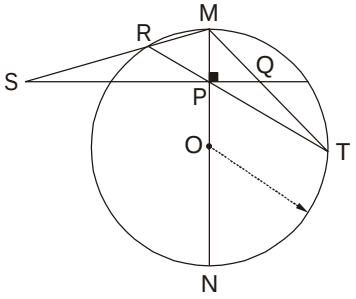
a) 6 u b) 3 u c) 4 u
d) 5 u e) 4,5 u

28. En el gráfico, P es punto de tangencia,
AB = 1 u, BC = 6 u y CD = 5 u.
Calcule : $(PB)^2 + (PC)^2$.



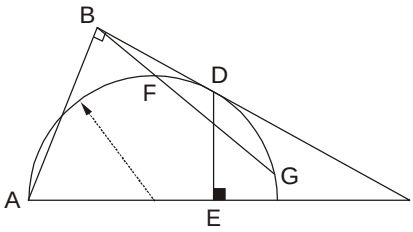
a) 40 u^2 b) 36 u^2 c) 42 u^2
d) 46 u^2 e) 30 u^2

29. En el gráfico $\overline{MN}$ es diámetro, OP = 2 u y PQ.PS = 60 u^2. Calcular la longitud del radio de la circunferencia.



a) 7 u b) 6 u c) 4 u
d) 8 u e) 5 u

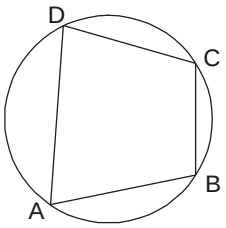
30. En el gráfico, D es punto de tangencia, DE = 4 u y BF = 2 u. Calcule FG.



a) 3 u b) 4 u c) 5 u
d) 6 u e) 8 u

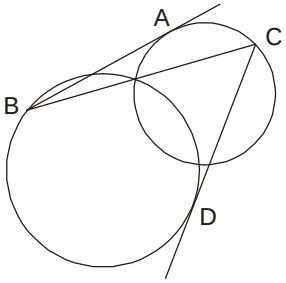
31. Se da un cuadrilátero ABCD inscrito en una circunferencia (como en el gráfico), con diagonales que se intersectan en P.
Calcule el valor de :

$$\frac{AP.PC}{PD.PB}$$



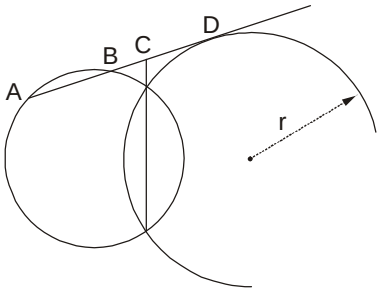
a) 1/4 b) 1 c) 1/2
d) 1/3 e) 3

32. Según el gráfico :
AB = 15 cm, CD = 8 cm. Calcule BC.



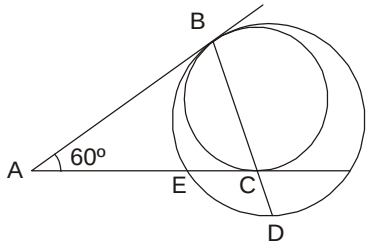
a) 11 cm b) 13 cm c) 15 cm
d) 17 cm e) 19 cm

33. En el gráfico, AB = 5 cm, BC = 4 cm.
Calcule CD.



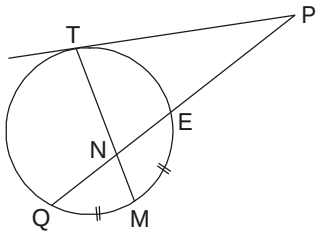
a) 3 cm b) 4 cm c) 5 cm
d) 6 cm e) 7 cm

34. En la figura B y C son puntos de tangencia. Si : AE = 8 u, EC = 4 u. Calcule CD.



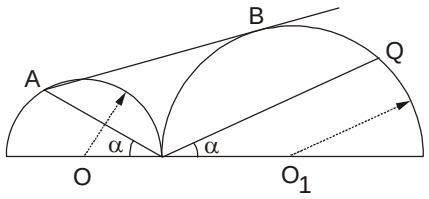
a) 1 u b) 2 u c) 3 u
d) 4 u e) 5 u

35. En el gráfico, calcule QN.
("T" punto de tangencia), PT = 9 u, EN = 3 u.



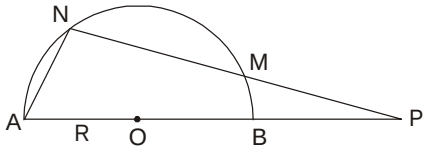
a) 3 u b) 3,5 u c) 4 u
d) 4,5 u e) 5 u

36. En el gráfico, B es punto de tangencia.
AB = 6u y AP = 4u. Calcule PQ.



a) 4 u b) 5 u c) 6 u
d) 8 u e) 9 u

37. En la siguiente figura se muestra una semicircunferencia de centro O y radio R. Siendo $\overline{MB}$ el lado de un polígono inscrito de 18 lados.
AN = MP = R. OP = 5u . Calcule MN en función de R.



a) $\frac{25-R^2}{R}$ b) $\frac{25-R}{R^2}$ c) $\frac{25-2R}{R}$

d) $\frac{25-2R^2}{R}$ e) $\frac{25-R^2}{2R}$

38. Graficar a una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$. Trazar las cuerdas $\overline{AF}$ y $\overline{BE}$ que se intersectan en "Q". Calcule el valor de $\overline{FB}$, sabiendo que :
AQ = 8 dm, QF = 4 dm, QE = 6 dm.

a) $\frac{2}{3}\sqrt{6}$ b) $\frac{4}{3}\sqrt{11}$ c) $\frac{4}{3}\sqrt{7}$

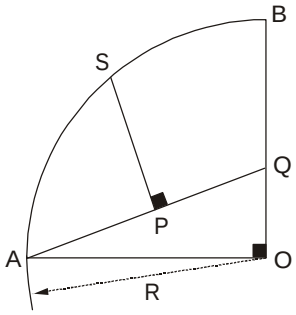
d) $\frac{4}{3}\sqrt{10}$ e) $\frac{16}{3}$

39. Los centros de la circunferencia inscrita y circunscrita a un triángulo son I y O en ese orden. La prolongación de $\overline{IO}$ corta a la inscrita en P y a la circunscrita en M, al prolongar $\overline{OI}$ corta a la inscrita en Q y a la circunscrita en N. Calcule el valor del inradio, si :
PM = a y QN = b.

a) $\frac{a+b}{3}$ b) $\frac{2ab}{a+b}$ c) $\sqrt{ab}$

c) $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$ e) $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

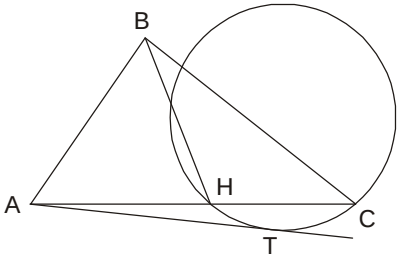
40. Calcule : OQ. Si : AP = PS = PQ.



a) $\frac{R\sqrt{5}}{5}$ b) $\frac{R\sqrt{3}}{3}$ c) $R(\sqrt{2}-1)$

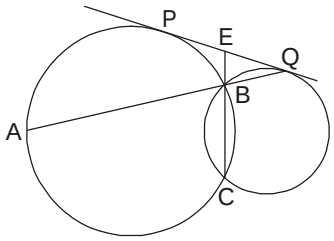
d) $\frac{R}{2}(\sqrt{2}+1)$ e) $\frac{R}{2}(\sqrt{2}-1)$

41. Calcule : AT, si : m$\sphericalangle$ ABH = m$\sphericalangle$ ACB y B = 8. (T es punto de tangencia).



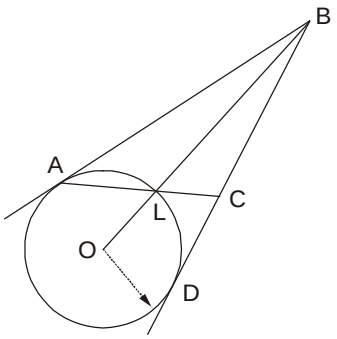
a) 4 u b) 6 u c) 8 u
d) 12 u e) 16 u

42. En el gráfico : P y Q son puntos de tangencia.
Si : AB = 6 u, BQ = 2 u, BC = 3 u, calcule EB.



a) 0,5 u b) 1 u c) 1,5 u
d) 2 u e) 1,2 u

43. En el gráfico, calcule AB, si :
AL = 5 u y LC = 4 u.
(A y D son puntos de tangencia).



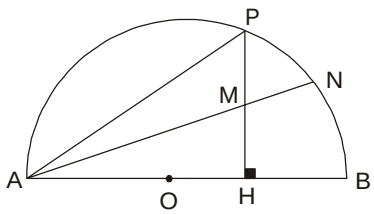
a) 18 u b) 20 u c) 25 u
d) 30 u e) 35 u

44. En una circunferencia se trazan los diámetros perpendiculares AB y CD que se cortan en O, luego se trazan las cuerdas BE y BF, las cuales se intersectan con $\overline{CO}$ y $\overline{OD}$ en M y N respectivamente. Si el radio de la circunferencia mide 1 u. Calcule :

$$\sqrt{(BM)(BE)+(BF)(BN)}$$

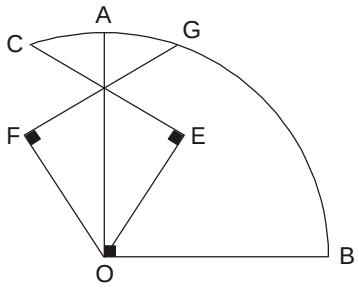
a) 1 u b) 2 u c) $\sqrt{2}$ u
d) 4 u e) $2\sqrt{2}$ u

45. Si : AP = 8 u, AM = 6 u y $\overline{AB}$ es diámetro.
Calcule MN.



a) 4 u b) 5 u c) 7/3 u
d) 10/3 u e) 14/3 u

46. Del gráfico: AO = OB; CD = 3 u; GD = 4 u y FD = 1u.
Calcule DE.

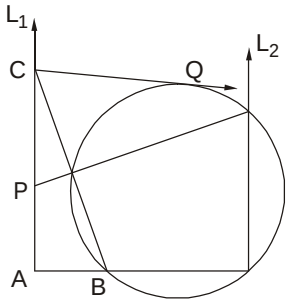


a) 2 u b) 2,4 u c) 2,5 u
d) 3,5 u e) 3 u

47. En una circunferencia de 16 cm de diámetro se traza una cuerda $\overline{TD}$ de 12 cm y por T una tangente $\overline{TP}$ a la circunferencia, siendo $\overline{PD}$ una secante que pasa por el centro de la circunferencia. La distancia de P a la circunferencia será en cm.

a) 52 cm b) 54 cm c) 56 cm
d) 58 cm e) 50 cm

48. En el gráfico : $L_1 // L_2$, AP = 10 u y PC = 8 u.
Calcule CQ.

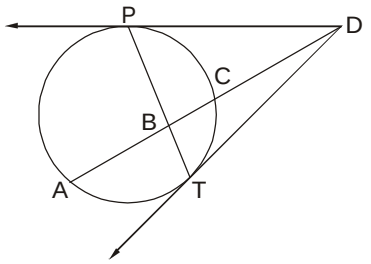


a) 10 u b) 12 u c) 11 u
d) 16 u e) 18 u

49. Grafique al cuadrilátero inscriptible ABCD, de modo que :
AB = BD, m∢BCD = 120°, BC = 6 u y CD = 4 u.
Calcule BD.

a) $2\sqrt{11}$ u b) $2\sqrt{13}$ u c) $2\sqrt{15}$ u
d) $2\sqrt{17}$ u e) $2\sqrt{19}$ u

50. En el gráfico, P y T son puntos de tangencia.
Si : AB = a y BD = b, calcule el valor de BC.



a) $\frac{ab}{2a+b}$ b) $\frac{ab}{2b+a}$ c) $\frac{2ab}{a+b}$

d) $\frac{ab}{a+b}$ e) $\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{ab}$

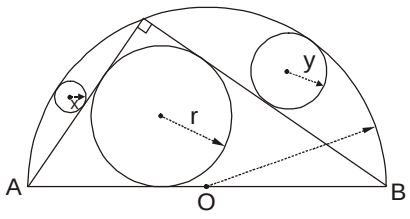
51. En un triángulo inscrito en una circunferencia, las sagitas correspondientes a cada lado mide 1 u, 2 u y 3 u.
Calcule la medida del menor lado del triángulo.

a) 5 u b) 6 u c) 7 u
d) 8 u e) 9 u

52. En un triángulo rectángulo ABC recto en B, se traza la ceviana BD = 6u. Si los inradios de los triángulos ABD y CBD son iguales, calcular el producto de los exradios relativos a los catetos.

a) 15 u^2 b) 18 u^2 c) 24 u^2
d) 30 u^2 e) 36 u^2

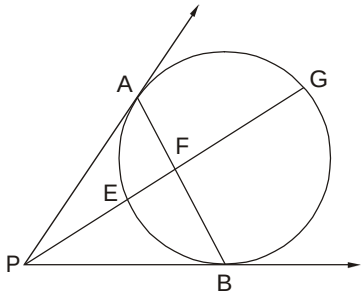
53. Según el gráfico, calculr "r" en función de "x" e "y".
Si : "x" e "y" tienen valores máximos.



a) $2\sqrt{xy}$ b) $\frac{x+y}{2}$ c) $2\sqrt{xy}$

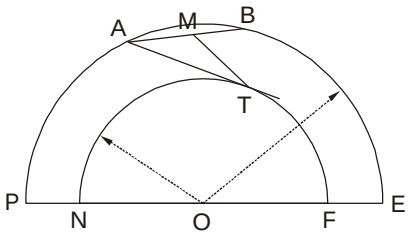
d) $2\sqrt{2xy}$ e) $\frac{x+y}{3}$

54. A y B son puntos de tangencia.
Si : EP = 6 u y EF = 4 u. Calcule FG.



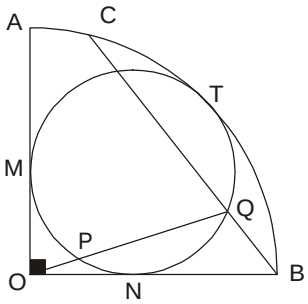
a) 12 u b) 16 u c) 18 u
d) 20 u e) 22 u

55. En el gráfico :
NP = 10 u, NO = 15 u, AM = MB = 7 u.
Calcule MT, si T es un punto de tangencia.



a) 5 u b) 10 u c) 12 u
d) 15 u e) 16 u

56. De la figura, AO = OB; OP = 1u; PQ = 3u.
(M, N y T, puntos de tangencia).
Calcule : BQ . QC.



a) $(\sqrt{2}-1)\,u^2$ b) $2(\sqrt{3}+1)\,u^2$
c) $4(2\sqrt{2}-1)\,u^2$ d) $(2\sqrt{2}-3)\,u^2$
e) $5(\sqrt{2}+1)\,u^2$

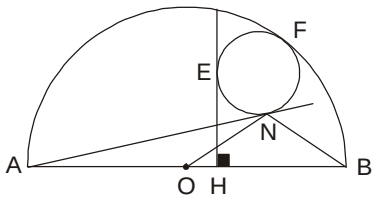
57. Una cuerda que mide 2m pertenece a una circunferencia de centro O. Dicha cuerda es dividida en media y extrema razón por un punto M. Calcule el radio de la circunferencia, sabiendo que el punto M dista 1 m del centro O.

a) $\frac{(\sqrt{5}+1)}{2}$ m b) $\sqrt{\frac{4+4\sqrt{5}}{7+3\sqrt{5}}}$ m

c) $(\sqrt{5}+1)$ m d) $2(\sqrt{5}-1)$ m

e) $\sqrt{\frac{11+7\sqrt{5}}{7+3\sqrt{5}}}$ m

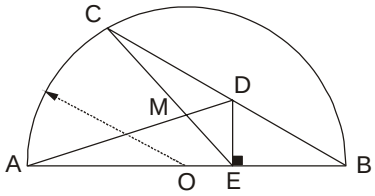
58. En el gráfico : AH = 12 u, HB = 4 u y BN = 6 u. Calcule ON.



a) 5 u b) $5\sqrt{3}$ u c) $6\sqrt{3}$ u

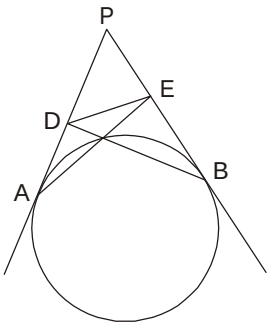
d) $4\sqrt{3}$ u e) $5\sqrt{2}$ u

59. Calcule MD, si : ME = 6 u y 2(AM) = 3(CM).



a) 1 u b) 2 u c) 3 u
d) 6 u e) 4 u

60. En el gráfico: A y B son puntos de tangencia. Si : DA = a y EB = b.



a) $\sqrt{a^2+ab+b^2}$ b) $\sqrt{a^2-ab+b^2}$

c) $\sqrt{a^2+2ab+2b^2}$ d) $\sqrt{a^2+ab-b^2}$

e) $\sqrt{a^2+a-b^2}$

Claves

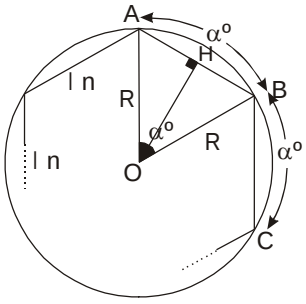
21.	b
22.	c
23.	e
24.	d
25.	b
26.	d
27.	c
28.	d
29.	d
30.	d
31.	b
32.	d
33.	d
34.	b
35.	d
36.	b
37.	d
38.	c
39.	c
40.	c

41.	c
42.	b
43.	d
44.	b
45.	e
46.	c
47.	c
48.	b
49.	e
50.	a
51.	b
52.	e
53.	d
54.	d
55.	d
56.	c
57.	e
58.	e
59.	e
60.	b

Capítulo

13 POLÍGONOS REGULARES

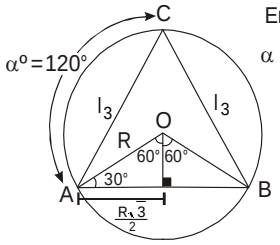
POLÍGONOS REGULARES



* Polígono regular ABC....., de n lados
* Centro : O
* Circunradio : R
* Arco o ∢ Central : $\alpha^o = \frac{360^o}{n}$
* Lado del polígono inscrito : l_n
* Apotema: $\overline{OH}$
* Elemento representativo : ΔAOB

CÁLCULO DEL LADO DE POLÍGONOS REGULARES MÁS USUALES

I. Triángulo Equilátero

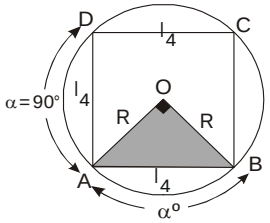


En ΔAOB:

$\alpha = m\widehat{AB} = 120°$

$\boxed{l_3 = R\sqrt{3}}$

II. Cuadrado

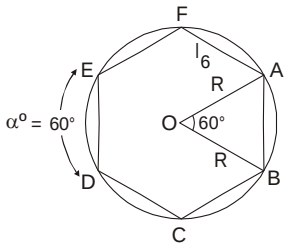


En el ΔAOB:

$\alpha = m\widehat{AB} = 90°$

$\boxed{l_4 = R\sqrt{2}}$

III. Hexágono Regular

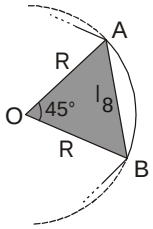


En el ΔAOB:

$\alpha = m\widehat{AB} = 60°$

$\boxed{l_6 = R}$

IV. Octógono Regular



En el ΔAOB:

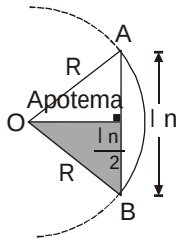
$l_8^2 = R^2 + R^2 - 2RCos45°$

$l_8^2 = 2R^2 - 2R^2\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\boxed{l_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}}$

$\alpha° = m\widehat{AB} = 45°$

CÁLCULO DEL APOTEMA (Ap)



En el ΔAOB:

$Ap^2 = R^2 - \frac{l_n^2}{4}$

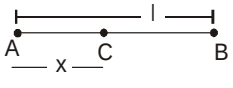
$Ap^2 = \frac{4R^2 - l_n^2}{4}$

$Ap^2 = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - l_n^2}$

DIVISIÓN DE UN SEGMENTO EN MEDIA Y EXTREMA RAZÓN

Por definición :

$x^2 = l(l - x)$

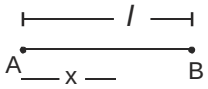


entonces, la solución es :

$\boxed{x = \frac{l(\sqrt{5}-1)}{2}}$

(AC > CB)

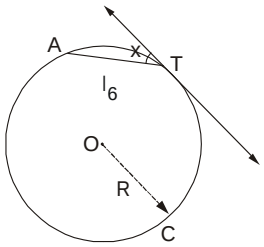
* $\overline{AC}$ (o sea "x") es la sección áurea de $\overline{AB}$.
* $\frac{(\sqrt{5}-1)}{2}$ se le denomina número áureo.

POLÍGONOS REGULARES	Arco o $\sphericalangle$ central	Lado
Triángulo	120°	$l_3 = R\sqrt{3}$
Cuadrado	90°	$l_4 = R\sqrt{2}$
Hexágono	60°	$l_6 = R$
Pentágono	72°	$l_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$
Octógono	45°	$l_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$
Decágono	36°	$l_{10} = R(\sqrt{5}-1)/2$
Dodecágono Regular	30°	$l_{12} = R\sqrt{2-\sqrt{3}}$
	Si x es la sección áurea de $\overline{AB}$. $\Rightarrow x = l(\sqrt{5}-1)/2$	

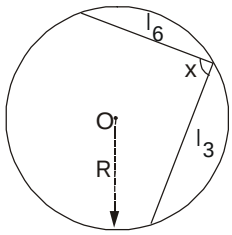
R : circunradio

Test de aprendizaje preliminar

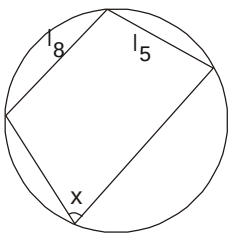
01. Si: "O": centro, "T": punto de tangencia. Calcular: "x".



02. Del gráfico, calcular : "x".

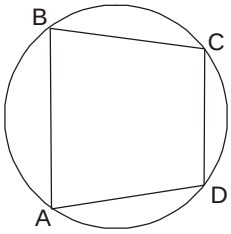


03. Calcular "x".



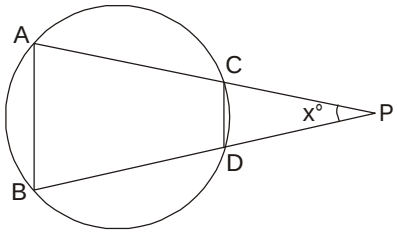
04. Si:

$AB = l_3$; $AD = l_6$; $BC = l_4$

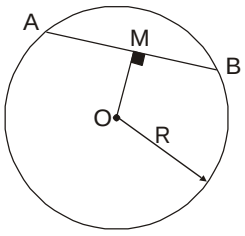


Entonces, CD es:

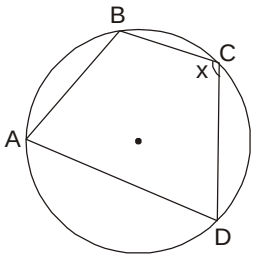
05. Si: $AB = l_3$; $CD = l_{10}$. Entonces, x° mide:



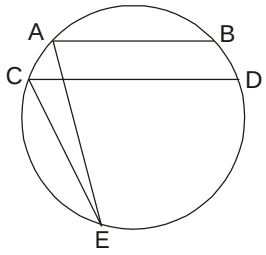
06. Si : R = 6, $AB = l_3$, entonces, OM mide :



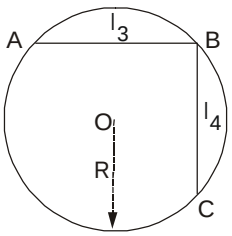
07. Calcular: x°, si : $AB = l_4$; $AD = l_3$.



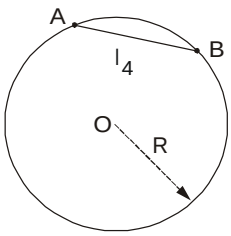
08. En la figura mostrada se cumple: $\overline{AB} // \overline{CD}$, $m\sphericalangle AEC = 14°$ y $\overline{AB}$ es el lado del pentágono regular inscrito en la circunferencia. Hallar $m\sphericalangle AED$.



09. Hallar : $m\sphericalangle ABC$.



10. Del gráfico, $l_4 = 4$, calcular el radio de la circunferencia.



Practiquemos :

11. ¿Cuál es el polígono regular cuyo lado es el doble de su apotema?

12. Calcular la relación entre el inradio y circunradio de un triángulo equilátero.

13. En un pentágono regular ABCDE, se traza $\overline{BE}$ y $\overline{AC}$ que se intersectan en "F". Si: $\overline{EF} = 7$, calcular el lado del pentágono.

14. En una circunferencia de radio R, se tiene una cuerda $\overline{AB}$ que mide $R\sqrt{3}$. ¿De qué polígono regular el segmento $\overline{AB}$ es un lado?

15. Un triángulo equilátero está inscrito en una circunferencia de radio 6. Hallar el lado del hexágono regular inscrito en el triángulo.

16. Diga cuánto mide el lado de un hexágono regular circunscrito a una circunferencia de radio igual a $4\sqrt{3}$.

17. Un cuadrado y un hexágono regular se inscriben en una misma circunferencia; la razón de sus apotemas es:

18. En una misma circunferencia, el cociente del perímetro del hexágono regular circunscrito entre el perímetro del hexágono regular inscrito, es de:

19. Calcular la longitud de una de las diagonales de un pentágono regular cuyo lado mide 2.

20. Si el lado de un pentágono regular mide $(\sqrt{5}-1)$ metros, hallar la suma de las longitudes de todas sus diagonales.

Problemas propuestos

21. En un triángulo ABC inscrito en una circunferencia, se tiene que :
$\overline{AB} = l_3$; $\overline{AC} = l_4$. Calcular la medida del lado BC, si la medida del radio de la circunferencia es 2.

a) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ b) $\sqrt{6}+\sqrt{2}$ c) $\sqrt{6}+\sqrt{3}$
d) $2+\sqrt{3}$ e) $2\sqrt{3}$

22. Se tiene un octógono regular inscrito en una circunferencia de radio igual a $3\sqrt{2}$. Hallar el perímetro de aquel polígono que se obtiene al unir consecutivamente los puntos medios de sus lados.

a) 12 b) 18 c) 20
d) 24 e) 48

23. Dado un dodecágono regular inscrito en una circunferencia de radio 4 cm. Hallar el perímetro del polígono que se obtiene al unir los puntos medios de sus lados.

a) 12 cm b) 18 cm c) 24 cm
d) 30 cm e) 36 cm

24. Dado un cuadrado de lado "L", a partir de cada vértice y sobre cada lado se toma un segmento "x", de tal manera que al retirarlos y unir los extremos libres se forme un octágono regular. Hallar "x".

a) $\frac{L}{2}(2-\sqrt{2})$ b) $\frac{L}{2}(2-1)$ c) $\frac{L}{2}(2+1)$
d) $\frac{L}{2}(\sqrt{2}+1)$ e) $\frac{L}{2}(\sqrt{2}+2)$

25. En un hexágono regular ABCDEF de lado $\sqrt{13}$, las prolongaciones de la diagonal $\overline{AC}$ y el lado $\overline{EF}$ se cortan en "P". Hallar PD.

a) 10 b) 11 c) 12
d) 13 e) 6,5

26. En un polígono regular ABCDEF... se cumple que $7(m\sphericalangle BAC) = m\sphericalangle ABD$, $AC = 2\sqrt{5}$. Calcular el radio de la circunferencia circunscrita a dicho polígono.

a) $\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ b) $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ c) $\sqrt{5}-1$
d) $\sqrt{5}+1$ e) $\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

27. Un triángulo equilátero está inscrito en una circunferencia de radio 2m. Calcular la suma de las alturas del triángulo.

a) 6 m b) $6\sqrt{3}$ m c) 9 m
d) $9\sqrt{3}$ m e) $8\sqrt{3}$ m

28. En un triángulo rectángulo ABC recto en B, se traza la ceviana BF, tal que : AB = FB, $m\sphericalangle FBC = 60°$; y $AC = 2\sqrt{2+\sqrt{3}}$ m. Hallar la longitud FB.

a) 1 m b) 2 m c) $\sqrt{3}$ m
d) $\sqrt{2}$ m e) $2\sqrt{2}$ m

29. Hallar el lado de un polígono regular inscrito en una circunferencia de radio 5cm, si se sabe que su apotema es la diferencia del lado del polígono con el radio de la circunferencia circunscrita.

a) 7 cm b) 8 cm c) 9 cm
d) 6 cm e) 5 cm

30. Se tiene un cuadrado de lado $8\sqrt{2}$. Si a partir de cada vértice se disminuye una cierta longitud "x" se formarán en cada esquina triángulos rectángulo isósceles. Eliminándolos quedará un polígono de 8 lados. Hallar "x" para que el polígono resultante sea regular.

a) $8(2+\sqrt{2})$ b) $8(\sqrt{2}+1)$ c) $8(2-\sqrt{2})$
d) $8(\sqrt{2}+1)$ e) $8(2\sqrt{2}-1)$

31. Un polígono regular de n lados, cuyo lado mide L_n está inscrito en una circunferencia cuyo radio mide R. Calcular la longitud del lado del polígono regular de doble número de lados que el anterior (L_{2n}), inscrito en la misma circunferencia.

a) $L_{2n} = \sqrt{2R^2 + R\sqrt{4R^2 - L_n^2}}$

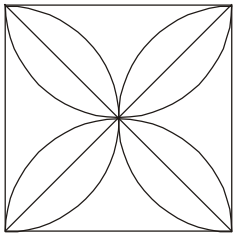
b) $L_{2n} = \sqrt{4R^2 + \sqrt{L_n^2 - 4R^2}}$

c) $L_{2n} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - L_n^2}}$

d) $L_{2n} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R + L_n^2}}$

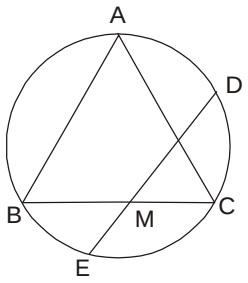
e) $L_{2n} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{3R - L_n^2}}$

32. Una ventana cuadrada de lado 60 cm tiene la forma del diseño dado. Las curvas son arcos de circunferencia. Entonces, la longitud de fierro usado en la construcción de la ventana, es:



a) $120(1+\sqrt{2}+2\pi)$ m b) $120(2+\sqrt{2}+\pi)$ m
c) $240(1+\sqrt{2}+\pi)$ m d) $240(2+2\sqrt{2}+\pi)$ m
e) $120(2+\sqrt{2}+2\pi)$ m

33. En la figura, el triángulo ABC es equilátero, M es punto medio del lado $\overline{BC}$ y D es punto medio del arco $\overset{\frown}{AC}$. Si x e y representan las longitudes de los segmentos $\overline{DM}$ y $\overline{ME}$ respectivamente, hallar x/y.



a) 5/3 b) 2 c) 4
d) 8/3 e) 7/3

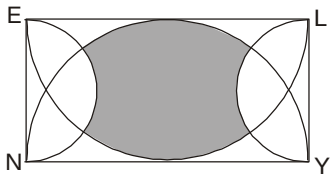
34. Los lados AB y BC de un triángulo ABC miden 2m y $(\sqrt{5}+1)$m, respectivamente. Calcular la $m\sphericalangle A$, si : $m\sphericalangle C = 18°$.

a) 20° b) 45° c) 15°
d) 30° e) 72°

35. Si el lado del dodecágono regular ABCDEFGHIJKL mide $\sqrt{6-3\sqrt{3}}$ m, hallar la longitud AE.

a) 1 m b) 2 m c) 3 m
d) 4 m e) 5 m

36. Si el perímetro del rectángulo NELY es 180 cm, indicar el perímetro de la región sombreada.

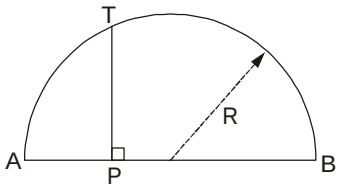


a) 35π cm b) 36π cm c) 39π cm
d) 38π cm e) 37π cm

37. Hallar la longitud del lado de un dodecágono regular sabiendo que el radio de la circunferencia inscrita en él mide 1cm.

a) $(2-\sqrt{3})$ cm b) $(\sqrt{2-\sqrt{3}})$ cm
c) $(\sqrt{2+\sqrt{3}})$ cm d) $2(2-\sqrt{3})$ cm
e) $(2+\sqrt{3})$ cm

38. En la figura "P", divide al diámetro $\overline{AB}$ en media y extrema razón. Calcular PT, si: $R=\sqrt{2+\sqrt{5}}$.



a) 0,5 b) 1 c) 1,5
d) 2 e) $\sqrt{5}$

39. En un polígono regular ABCDEFG, si: $\frac{1}{AD}+\frac{1}{AC}=\frac{1}{7}$. Calcular AB.

a) 6 b) 7 c) 8
d) 9 e) 10

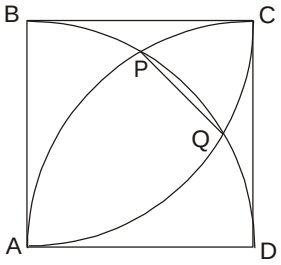
40. En un eneágono regular ABCDEFGHI se cumple que: AB + BD = 14m. Calcular BG.

a) 3 m b) 7 m c) 11 m
d) 14 m e) 21 m

41. En un polígono regular de 13 lados ABCDEFGHIJKM. AD = a, AE = b. Calcular JD.

a) a + b b) $\frac{ab}{a+b}$ c) $\sqrt{a^2+b^2}$
d) $\sqrt{b^2+ab}$ e) $\sqrt{a^2+ab}$

42. ABCD es un cuadrado de lado 2 dm, A, B y D son centros. Calcular el valor de $\overline{PQ}$.

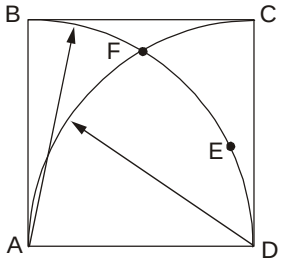


a) $2\sqrt{2+\sqrt{3}}$ dm b) $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ dm
c) $\sqrt{2-\sqrt{2}}$ dm d) $2\sqrt{2-\sqrt{3}}$ dm
e) $(\frac{\sqrt{5}-1}{2})$ dm

43. El cateto menor de un triángulo rectángulo mide : $\sqrt{2-\sqrt{2}}$, y es igual a la longitud de la bisectriz interna relativa a la hipotenusa. Hallar la longitud de la hipotenusa.

a) 1 m b) 2 m c) 3 m
d) 4 m e) 6 m

44. ABCD es un cuadrado cuyo lado mide $4\sqrt{2+\sqrt{3}}$. Calcular la distancia de "F" al punto medio "E" del FD.



a) 2 b) $2\sqrt{2}$ c) 6
d) 4 e) $4\sqrt{3}$

45. En un triángulo ABC, donde : $m\sphericalangle A = 45°$ y $m\sphericalangle C = 15°$, se trazan las alturas $\overline{AH}$ y $\overline{CQ}$. Hallar: QH, si: AC = 20 m.

a) 10 m b) $5\sqrt{2}$ m c) $2(\sqrt{5}+1)$ m
d) 5 m e) $10\sqrt{2-\sqrt{2}}$ m

46. Dado un triángulo ABC obtuso en "A", de tal manera: $AB=\sqrt{2}$, $BC=\sqrt{5}+1$ y la $m\sphericalangle C=18°$. Determinar la $m\sphericalangle B$.

a) 18° b) 9° c) 27°
d) 54° e) 36°

47. Calcular el lado del polígono regular de 16 lados circunscrito a una circunferencia de radio $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$.

a) $4\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ b) $\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}$

c) $2\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ d) $2\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}$

e) $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

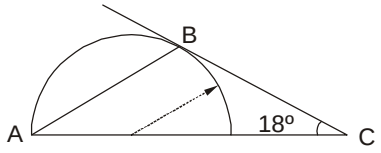
48. En un octógono regular ABCDEFGH inscrito en una circunferencia en el arco $\overset{\frown}{BC}$, se ubica el punto "P" de manera que: $\overline{PD}$ y $\overline{PF}$ miden "m" y $n\sqrt{2}$. Hallar: "PH".

a) 2n + m b) m + n c) 2m - n

d) $\frac{mn}{m+n}$ e) 2n - m

49. En la figura, calcular AB, si :

BC = $\sqrt{5-\sqrt{5}}$. (B, punto de tangencia).

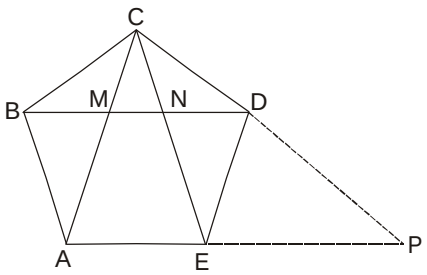


a) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ b) $\sqrt{5}+1$

c) $\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)$ d) $\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)$

e) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{5}-1)$

50. En la figura, ABCDE es un pentágono regular. Calcular EP, si : MN = 2.



a) $2(\sqrt{5}+2)$ b) $2(\sqrt{5}+1)$

c) $4(\sqrt{5}-1)$ d) $8(\sqrt{5}-2)$

e) $4(\sqrt{5}-1)$

51. Calcular la flecha correspondiente a una cuerda que subtiende un arco de 144° en una circunferencia de 8 unidades de diámetro.

a) $2(\sqrt{2}-1)$ b) $5-\sqrt{5}$ c) $2+\sqrt{2}$

d) $\sqrt{5}+1$ e) $\sqrt{2}+2$

52. Se tiene un polígono regular inscrito en una circunferencia de radio R, cuyo apotema mide "a" unidades. Calcular el apotema de otro polígono regular del doble número de lados que el anterior, si cuyos perímetros son iguales.

a) $\sqrt{R^2-a^2}$ b) $\frac{aR}{2}$ c) $\sqrt{Ra}$

d) $\frac{R+a}{2}$ e) $\frac{2R}{a}$

53. La sección áurea del segmento $\overline{AB}$ es $\overline{BC}$, la sección de $\overline{AC}$ es $\overline{AM}$, la sección áurea de $\overline{AM}$ es AF.
Si : BC = 4, calcular AF.

a) $2(\sqrt{5}-1)$ b) $2(\sqrt{5}+1)$ c) $4(\sqrt{5}-2)$

d) $\sqrt{5}-1$ e) $3(\sqrt{5}-1)$

54. En un dodecágono regular ABCDEFGHIJKL, $\overline{AE}$ y $\overline{CF}$ se intersectan en P. Calcular PE, si : BC = $2\sqrt{2}$.

a) 1 b) $\sqrt{2}$ c) $\frac{3}{2}$

d) $\sqrt{3}$ e) $\sqrt{5}$

55. En un romboide ABCD, se cumple que BC = AC, hallar: BD, si: m$\sphericalangle$ CAD = 30° y AD = $\sqrt{5+2\sqrt{3}}$ m.

a) $\sqrt{2}$ m b) $2\sqrt{3}$ m c) $3\sqrt{2}$ m

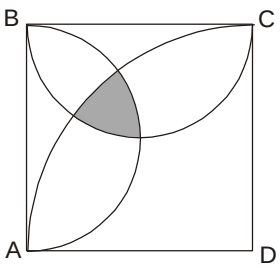
d) $\sqrt{13}$ m e) $2\sqrt{6}$ m

56. En un triángulo rectángulo ABC, el ángulo "C" mide 11°15' y la hipotenusa $\overline{AC}$ es igual a $2\sqrt{4+2\sqrt{2}}$ m. Hallar la menor altura del triángulo.

a) 1 m b) 2 m c) $\sqrt{2}$ m

d) $2\sqrt{2}$ m e) $\sqrt{2-\sqrt{2}}$ m

57. Si ABCD es un cuadrado cuyo lado mide 180 cm, hallar el perímetro de la región sombreada.



a) 53π cm b) 55π cm c) 56π cm
d) 57π cm e) 58π cm

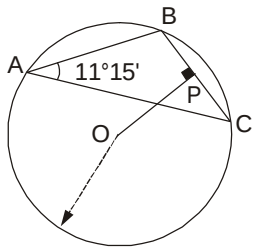
58. Se tiene un octógono regular ABCDEFGH inscrito en una circunferencia de radio R. Hallar la distancia de A al punto medio de $\overline{ED}$.

a) $\frac{R}{2}\sqrt{10+3\sqrt{2}}$ b) $2R\sqrt{2-\sqrt{2}}$
c) $2R\sqrt{2+\sqrt{2}}$ d) $\frac{R}{2}\sqrt{8+3\sqrt{2}}$
e) $2R\sqrt{2}$

59. En un triángulo ABC, se trazan las cevianas $\overline{CF}$ y $\overline{AE}$ cumpliéndose que:
$m\sphericalangle AFC = m\sphericalangle AEC = 135°$ y,
$m\sphericalangle B = 120°$. Calcular EF, si : $AC = 2\sqrt{2}$.

a) $\sqrt{3-\sqrt{2}}$ b) $2\sqrt{2+\sqrt{3}}$
c) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ d) $\sqrt{2-\sqrt{3}}$
e) $2\sqrt{2-\sqrt{3}}$

60. En la figura, $OP = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$.
Calcular BC.



a) $\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}$ b) $4\sqrt{2-\sqrt{2}}$
c) $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ d) $2\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$
e) $2\sqrt{2}$

Claves

21.	b
22.	d
23.	c
24.	a
25.	d
26.	a
27.	c
28.	a
29.	b
30.	b
31.	c
32.	b
33.	e
34.	d
35.	c
36.	e
37.	d
38.	d
39.	b
40.	d

41.	e
42.	d
43.	b
44.	d
45.	a
46.	c
47.	c
48.	e
49.	e
50.	a
51.	b
52.	d
53.	c
54.	b
55.	d
56.	a
57.	a
58.	a
59.	e
60.	d

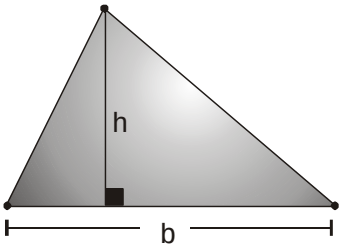
Capítulo

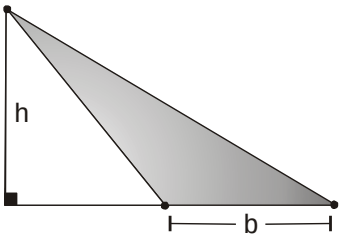
14

ÁREAS DE LAS REGIONES POLIGONALES Y RELACIONES DE ÁREAS

ÁREA DE LA REGIÓN TRIANGULAR

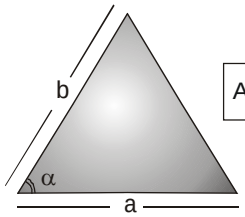
* ***Forma Básica***





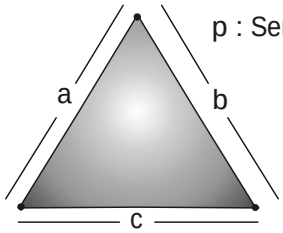
$$A = \frac{b.h}{2}$$

* ***Forma Trigonométrica***



$$A = \frac{a.b}{2}.Sen\alpha$$

* ***Fórmula de Herón***



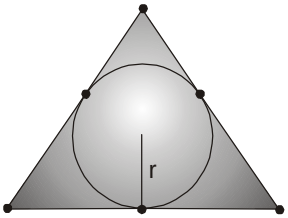
p : Semiperímetro

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

ÁREA EN FUNCIÓN DE LOS RADIOS

* ***Con el Inradio***

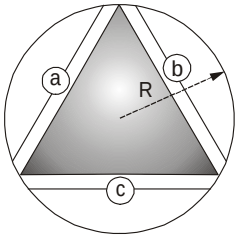
Válido para todo polígono circunscrito.



$$A = p \cdot r$$

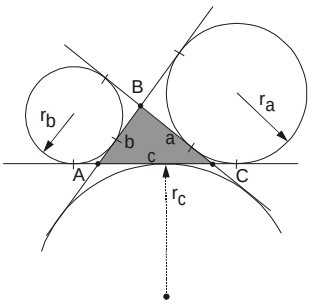
p : semiperímetro

* ***Con el Circunradio***



$$A = \frac{a.b.c}{4R}$$

* ***Con los Exradios***



$$A = (p-a)r_a$$
$$A = (p-b)r_b$$
$$A = (p-c)r_c$$

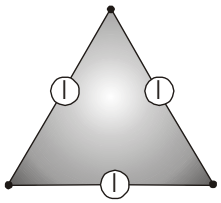
$$A = \sqrt{r.r_a.r_b.r_c}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$$

r : Inradio del triángulo ABC.

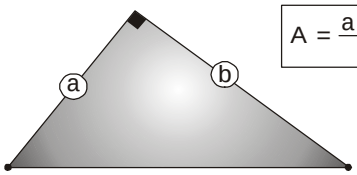
CASOS PARTICULARES

* ***Triángulo Equilátero***

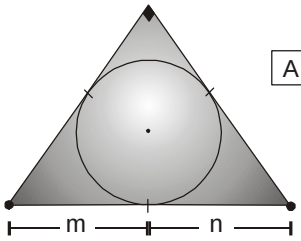


$$A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

* ***Triángulo Rectángulo***



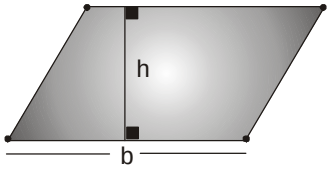
$$A = \frac{a \cdot b}{2}$$



$$A = m.n$$

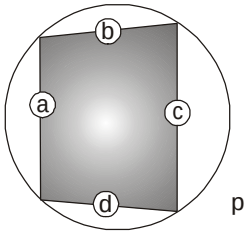
ÁREA DE LA REGIÓN CUADRANGULAR

* ***Paralelogramo***



$$A = b \cdot h$$

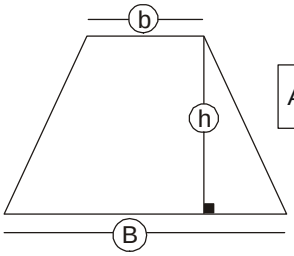
* ***Cuadrilátero Inscrito***



p : Semiperímetro

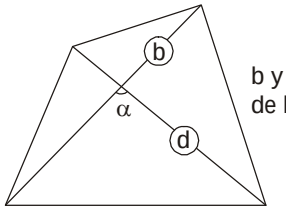
$$A = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

* ***Trapecio***



$$A = \frac{(B+b)}{2}.h$$

* ***Cualquier cuadrilátero***

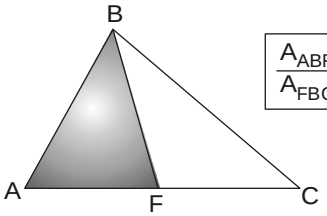


b y d longitudes de las diagonales

$$A = \frac{b.d}{2}.Sen\alpha$$

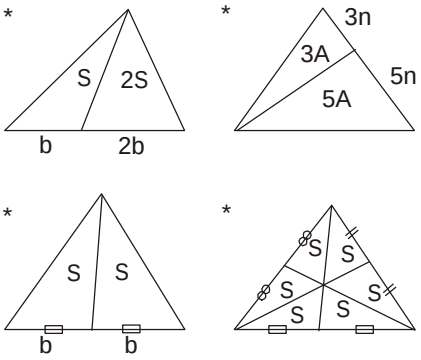
RELACIONES DE ÁREAS

Primera Relación

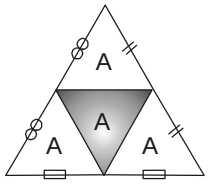


$$\frac{A_{ABF}}{A_{FBC}} = \frac{AF}{FC}$$

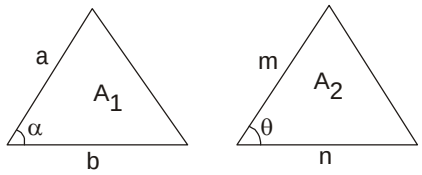
Consecuencias :



Observaciones :

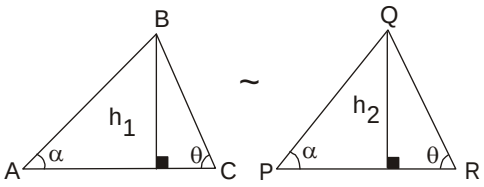


Segunda Relación



Si : $\alpha = \theta$ ó $\alpha + \theta = 180^o \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{a.b}{m.n}$

Tercera Relación



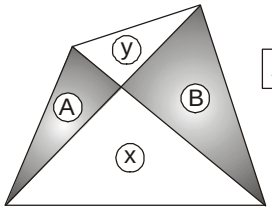
Si : $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

$$\Rightarrow \frac{A_{ABC}}{A_{PQR}} = \frac{AC^2}{PR^2} = \frac{h_1^{\,2}}{h_2^{\,2}} = k^2$$

* Válido para todo par de polígonos semejantes.

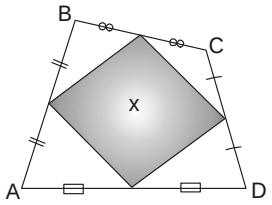
Cuarta Relación

En todo cuadrilátero convexo



A.B = x.y

En todo cuadrilátero

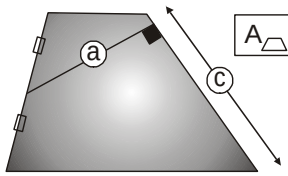


$x = \frac{A_{ABCD}}{2}$

Observaciones :

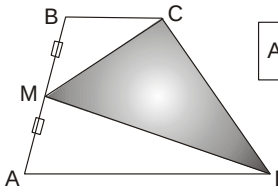
En el trapecio, se cumple que:

*



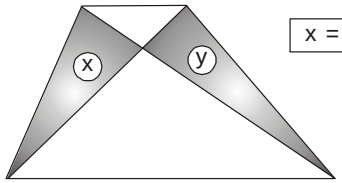
$A_{\square} = a.c$

*



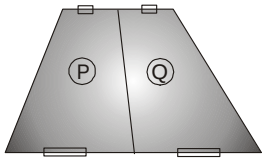
$A_{CMD} = \frac{A_{ABCD}}{2}$

*



x = y

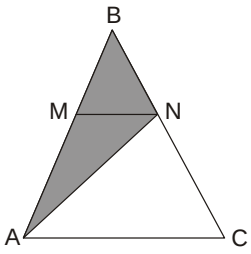
*



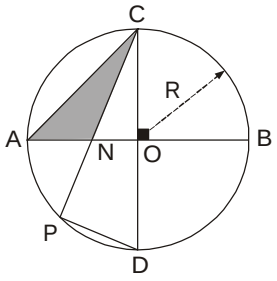
P = Q

Test de aprendizaje preliminar

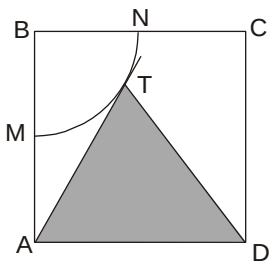
01. En la figura, el triángulo ABC es equilátero y $\overline{MN} // \overline{AC}$. Hallar el área de la región triangular ABN, si: AC = 12 y AM = 10.



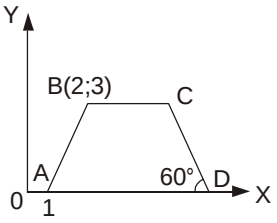
02. Hallar el área de la región triangular ACN, si : R = 20 y PD = 24.



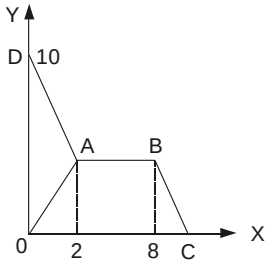
03. En la figura se tienen un cuadrado cuyo lado mide 2, si M y N son puntos medios. Hallar el área de la región sombreada. (T : punto de tangencia).



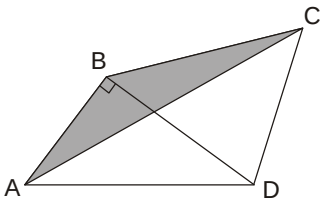
04. ABCD es un trapecio cuya área de su región es igual a $\frac{3(7+\sqrt{3})}{2}$ m^2.
Hallar la abscisa del vértice C.



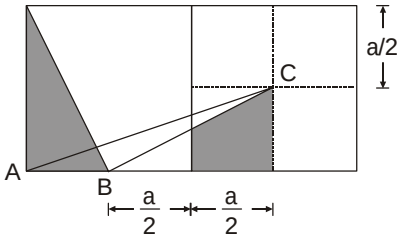
05. En la figura, el área de la región del triangular OAD es igual a los 5/16 del área del trapecio isósceles OABC. Las coordenadas del punto medio del segmento AB son:



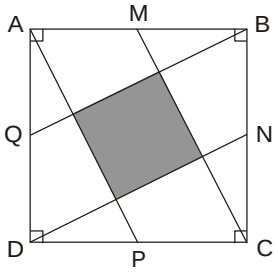
06. Hallar el área de la región del triángulo ABC, si : AD = 13, AB = 5 y el triángulo BCD es equilátero.



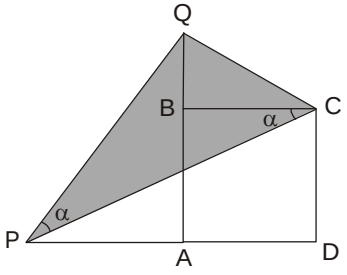
07. La siguiente figura está formada por dos cuadrados de lado "a". Si el área del triángulo ABC = $\frac{10}{7}\pi m^2$. Calcular el área de la región sombreada.



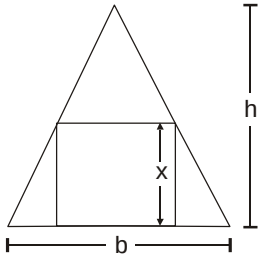
08. En la siguiente figura, M, N, P, Q; son los puntos medios de los lados del cuadrado ABCD. Si el lado del cuadrado ABCD es 25 m, calcular el área de la región sombreada.



09. Hallar el área de la región triangular PQC, si ABCD es un cuadrado y (PQ)(AB) = 20.



10. En la figura, si el triángulo tiene base "b" y altura "h", entonces, el área de la región del rectángulo inscrito es:



Practiquemos :

11. Calcular el área de la región de un triángulo equilátero, sabiendo que el radio de la circunferencia inscrita mide 2.

12. Se tiene un triángulo isósceles cuyos lados de igual longitud miden b cm. Para obtener un triángulo con la mayor área posible, el tercer lado debe tener una longitud de:

13. El triángulo, que puede ser inscrito en una semicircunferencia de radio "r", tiene una región cuya área es máxima y su valor es:

14. En un triángulo rectángulo de hipotenusa 50u y, donde el cateto es el doble del otro, calcular el área de la región del triángulo.

15. Hallar la razón entre las áreas de una región triangular equilátera y una región cuadrada, si estas regiones son isoperimétricas.

16. El área de la región de un cuadrado es 100 m^2 ; está inscrito en una circunferencia. ¿Cuál es el área de la región del cuadrado que se puede inscribir en la mitad de la misma circunferencia?

17. Se tienen 3 circunferencias tangentes exteriormente dos a dos. Hallar el área de la región del triángulo que se forma al unir sus centros, si se sabe que el producto de sus radios es 8 m^3 y la suma de sus radios es 6m.

18. Calcular el área de la región de un triángulo equilátero que tiene por altura el radio de la circunferencia circunscrita a otro triángulo equilátero de 18 m^2 de área de su región.

19. En un triángulo ABC, isósceles con $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, la altura que parte de B mide 8 m y el perímetro 32 m. El área de la región triangular es:

20. Si en un triángulo las alturas miden 12cm, 15cm y 20cm, entonces, el área de su región en cm^2 es:

Problemas propuestos

21. Los radios de las circunferencias exinscritas relativas a los catetos de un triángulo rectángulo miden 4 y 8. Hallar el área de la región del triángulo.

a) 100 b) 12 c) 32
d) 80 e) 16

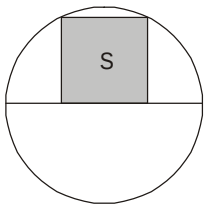
22. En un triángulo, sus exradios valen 2u, 3u y 6u. Hallar el área de la región triangular.

a) 12 u^2 b) 2 u^2 c) 6 u^2
d) 16 u^2 e) 8 u^2

23. Tres lados de un cuadrilátero convexo valen 3u, 4u y 3u. ¿Cuál de los siguientes valores puede ser el área de la región cuadrangular?

a) 13 u^2 b) 14 u^2 c) 15 u^2
d) 18 u^2 e) 26 u^2

24. En un semicírculo, se encuentra inscrito un cuadrado "S" de 120 cm^2 de área. Determinar el área de la región del cuadrado inscrito en todo el círculo.



a) 240 cm^2 b) 300 cm^2 c) 600 cm^2
d) 220 cm^2 e) 150 cm^2

25. En un triángulo ABC se traza la circunferencia exinscrita relativo al lado $\overline{BC}$, tangente en M y P las prolongaciones de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente, siendo "O" centro de dicha circunferencia. Si : AB = 10, BC = 17 y AC = 21. Hallar el área de la región triangular OMP.

a) 47,6 b) 57,6 c) 67,6
d) 77,6 e) 71,2

26. En un triángulo ABC, se sabe que AB = 8, BC = 9. ¿Para qué valor de AC el área de la región triangular ABC será máxima?

a) 16 b) 17 c) $\sqrt{145}$
d) $\sqrt{135}$ e) $\sqrt{115}$

27. En un triángulo isósceles, la base mide 15 y la altura relativa a uno de los lados iguales mide 12. Calcular el área de la región triangular.

a) 50 b) 75 c) 90
d) 100 e) 150

28. Los lados de un triángulo miden $\sqrt{26}$, $\sqrt{18}$ y $\sqrt{20}$. Calcular el área de esta región triangular.

a) 6 b) 9 c) 12
d) 15 e) 18

29. La longitud del lado de un cuadrado ABCD es 6 cm. Se construye exteriormente el triángulo equilátero CED y se traza $\overline{AE}$. Calcular el área de la región triangular AED.

a) 6 cm^2 b) 9 cm^2 c) 12 cm^2
d) 8 cm^2 e) 10 cm^2

30. La base de un triángulo isósceles es $\sqrt{2}$. Si las medianas trazadas hacia los lados congruentes se cortan perpendicularmente, entonces, el área de la región triangular es :

a) 2 b) 3 c) 1,5
d) 2,5 e) 3,5

31. En un triángulo ABC, se conoce que la altura $\overline{BH}$ y la mediana $\overline{BM}$ trisecan al ángulo ABC. Calcular el área de la región triangular ABC, si: HM = 1m.

a) $2\sqrt{2}$ m^2 b) $4\sqrt{2}$ m^2 c) $2\sqrt{3}$ m^2
d) $4\sqrt{3}$ m^2 e) $8\sqrt{3}$ m^2

32. Las alturas de un triángulo miden 6u, 8u y 12u. Hallar el área de la región triangular.

a) $24\sqrt{5}$ u^2 b) $\frac{32}{5}\sqrt{5}$ u^2 c) $\frac{16}{3}\sqrt{5}$ u^2
d) $\sqrt{455}$ u^2 e) $\frac{64}{5}\sqrt{15}$ u^2

33. En un hexágono regular de lado L, se unen los puntos medios de cuatro lados opuestos dos a dos. Luego, se unen los puntos medios de los lados del rectángulo que se formó, obteniéndose un cuadrilátero. Hallar el área de la región limitada por este cuadrilátero.

a) $(\sqrt{3}/8)L^2$ b) $(3\sqrt{3}/4)L^2$ c) $(3\sqrt{3}/8)L^2$
d) $(\sqrt{3}/4)L^2$ e) $(\sqrt{3}/2)L^2$

34. Desde el vértice de uno de los ángulos agudos de un rombo se trazan perpendiculares de 2 cm de longitud hacia las prolongaciones de los lados opuestos. Si la distancia entre los pies de dichas perpendiculares es 3cm. Hallar el área de la región limitada por el rombo.

a) $\frac{32}{3\sqrt{7}}$ b) $\frac{30}{\sqrt{7}}$ c) $\frac{35}{2\sqrt{7}}$
d) $\frac{36}{5\sqrt{6}}$ e) $\frac{39}{2\sqrt{6}}$

35. El área de la región triangular es de 150m^2. Además, se sabe que el segmento que une el punto de intersección de las medianas con el punto de intersección de las bisectrices es paralelo a uno de los catetos. Calcular los catetos.

a) 60 m y 5 m b) 25 m y 12 m
c) 15 m y 20 m d) 30 m y 10 m
e) 50 m y 6 m

36. ABCD es un cuadrado. E está en $\overline{AD}$ y F está en la prolongación de $\overline{DC}$, de modo que $\overline{EB} \perp \overline{FB}$. Si el área de la región ABCD es 256 y el área de la región triangular EBF es 200, determinar CF.

a) $25\sqrt{3}/3$ b) 9 c) $20\sqrt{3}/3$
d) 12 e) $17\sqrt{2}/3$

37. De todos los rectángulos de perímetro 24 y dimensiones enteras, las dimensiones del rectángulo de área máxima:

a) Son 5 y 7.
b) Son 8 y 4.
c) Son 9 y 3.
d) No pueden determinarse.
e) 6 y 6.

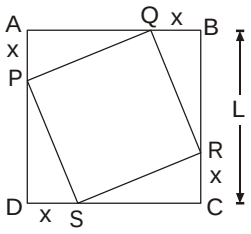
38. Sobre los catetos de un triángulo rectángulo ABC, de longitudes 5 y 7 respectivamente, construimos dos triángulos rectángulos isósceles ADB y BEC, tomando $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ por hipotenusas. Calcular el área de la región del polígono resultante.

a) 30 b) 26 c) 28
d) 36 e) 45

39. En un triángulo rectángulo, cuyos catetos tienen una longitud de 50 m y 120 m, se inscribe un rectángulo que tiene dos de sus lados contenidos por los catetos y uno de sus vértices está en la hipotenusa. Determinar el área máxima de dicha región rectangular.

a) 1200 m^2 b) 1500 m^2 c) 1750 m^2
d) 2000 m^2 e) 2500 m^2

40. Sobre los lados de un cuadrado ABCD, de lado igual a "L" se localizan, a igual distancia de los vértices, los puntos P, Q, R y S, que al unirse determinan el cuadrilátero PQRS tal como se muestra en la figura. Entonces, los valores de x que hacen que la región PQRS tenga área mínima y máxima, son respectivamente.

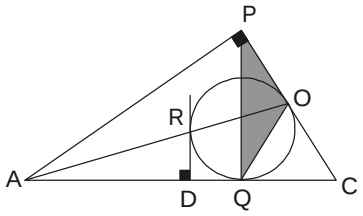


a) L/3, L/2 b) L/2, L/4 c) 0, L/2
d) L/5, L e) L/2, 0

41. Hallar el área de la región de un polígono regular inscrito en una circunferencia de radio R, sabiendo que el doble de su perímetro es igual al perímetro del polígono regular del mismo número de lados, pero circunscrito a la circunferencia dada.

a) $\frac{3}{4}\sqrt{3}R^2$ b) $\frac{2}{3}\sqrt{3}R^2$ c) $\frac{4}{5}\sqrt{2}R^2$
d) $2R^2$ e) $\frac{6}{5}\sqrt{2}R^2$

42. En el gráfico, hallar el área de la región sombreada, si: PO = 16. (Q, R, O $\rightarrow$ punto de tangencia).

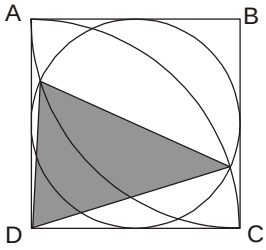


a) 256 b) 135 c) 128
d) 144 e) 121

43. Sobre cada uno de los lados de un triángulo equilátero se construyen exteriormente cuadrados, cuyos perímetros son iguales a 16 unidades.
Calcular el área de la región triangular cuyos vértices son los centros de los cuadrados.

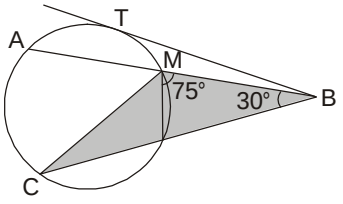
a) 16 b) $2(2\sqrt{3}+3)$ c) $4(2\sqrt{3}+3)$
d) $8(2\sqrt{3}+3)$ e) $4(\sqrt{3}+\sqrt{2})$

44. Siendo ABCD un cuadrado de lado "a"; hallar el área de la región sombreada, si A y C son centros de los arcos $\widehat{BD}$.



a) $\frac{a^2\sqrt{7}}{4}$ b) $\frac{a^2\sqrt{14}}{2}$ c) $\frac{a^2\sqrt{14}}{3}$
d) $\frac{a^2\sqrt{7}}{8}$ e) $\frac{a^2\sqrt{21}}{4}$

45. Según el gráfico, calcular el área de la región sombreada; si TB = a.
("T" es punto de tangencia).



a) $a^2/2$ b) $a^2/4$ c) $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
d) a^2 e) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

46. Sea ABC un triángulo rectángulo isósceles ($m\sphericalangle B = 90°$). Exteriormente, construya el cuadrado ACDE. $\overline{BE}$ y $\overline{BD}$ cortan a $\overline{AC}$ en los puntos "M" y "N" en ese orden. Si el área de la región triangular MBN es de "S" cm^2. Calcular el área de la región cuadrada ACDE.

a) 6.S cm^2 b) 8.S cm^2 c) 10.S cm^2
d) 12.S cm^2 e) 24.S cm^2

47. En una circunferencia, de centro "O" y diámetro $\overline{AB}$, se ubica el punto "P", tal que: AP = PB; se trazan las cuerdas $\overline{PS}$ y $\overline{PR}$ y que intersecan a $\overline{AB}$ en los puntos M y N, se traza $\overline{RH}$ perpendicular a $\overline{AB}$, si : AM = 4; NH = 2 y HB = 1. Además:
$m\sphericalangle SOR = 90°$.
Calcular el área de la región triangular MNR.

a) $\frac{5\sqrt{11}}{2}u^2$ b) $6\sqrt{13}\ u^2$ c) $\frac{3\sqrt{11}}{2}u^2$
d) $\frac{\sqrt{171}}{2}u^2$ e) $\frac{2\sqrt{17}}{3}u^2$

48. Se tiene un cuadrado ABCD, sobre $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ se ubican los puntos M y N respectivamente.
Si : BM = 3u; ND = 2u, calcular el área de la región triangular MCN, si la $m\sphericalangle MAN = 45°$.

a) 24 u^2 b) 12 u^2 c) 6 u^2
d) 15 u^2 e) 25 u^2

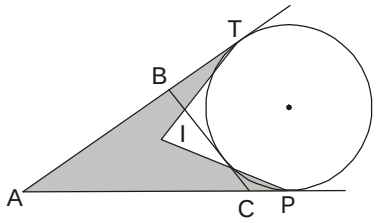
49. Las áreas de las regiones del octágono regular y del dodecágono regular inscritos en una misma circunferencia están en la relación de :

a) $\sqrt{2}/3$ b) $3\sqrt{2}/2$ c) $2\sqrt{2}/3$
d) $\sqrt{2}/4$ e) $3\sqrt{2}/4$

50. Un triángulo ABC, se encuentra inscrito en una circunferencia de radio R; se traza la altura $\overline{AH}$ y luego las perpendiculares $\overline{HP}$ y $\overline{HQ}$ y hacia los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ (en ese orden). Si : PQ = a, calcular el área de la región triangular ABC.

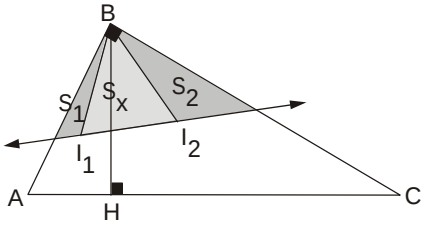
a) $\frac{aR}{2}$ b) $(\sqrt{a}+\sqrt{R})^4$ c) aR
d) $a^2\sqrt{R}$ e) $(a+R)^2$

51. En la figura, AB = 7 y BC = 6 y AC = 11. Calcular el área de la región sombreada, si "I" es incentro del triángulo ABC.
(T, P y R, puntos de tangencia).



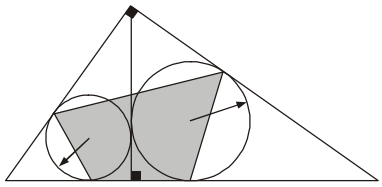
a) $6\sqrt{10}$ b) $8\sqrt{6}$ c) $10\sqrt{5}$
d) $12\sqrt{3}$ e) 24

52. Del gráfico, si I_1 e I_2 son los incentros de los triángulos ABH y HBC, respectivamente, hallar el área de la región "Sx" en función de S_1 y S_2.



a) S_1+S_2 b) $\frac{S_1+S_2}{2}$ c) $\sqrt{S_1S_2}$
d) $\sqrt{S_1{}^2+S_2{}^2}$ e) $\frac{S_1S_2}{S_1+S_2}$

53. Si los radios de los círculos son 3 y 4, hallar el área de la región sombreada.



a) 50 b) 51,12 c) 53,6
d) 56,9 e) 56,4

54. Exteriormente a los lados del triángulo ABC se construyen los triángulo rectángulo APB, BQC y ALC, tal que : $\overline{PC}\perp\overline{AB}$, $\overline{BC}\perp\overline{AQ}$ y $\overline{AC}\perp\overline{BL}$. Hallar el área de la región triangular ABC si el área de los regiones triangulares APB, BQC y ALC son 1, 2 y 3 u^2, respectivamente.

a) $2\sqrt{7}$ u^2 b) $\sqrt{13}$ u^2 c) $7\sqrt{2}$ u^2
d) $\sqrt{14}$ u^2 e) $3\sqrt{21}$ u^2

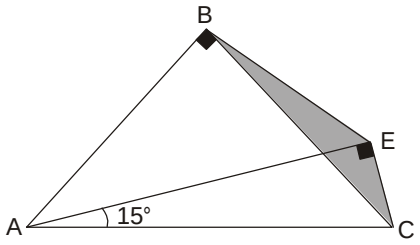
55. El área de la región triangular ABC es $5m^2$; se tiene una recta exterior al triángulo a la cual se trazara las perpendiculares $\overline{AP}$, $\overline{BQ}$ y $\overline{CR}$. Hallar el área de la región triangular que se forma al unir los puntos medios de : $\overline{AP}$, $\overline{BQ}$ y CR.

a) 10 m^2 b) 3 m^2 c) 3,5 m^2
d) 2 m^2 e) 2,5 m^2

56. Si la altura de un trapecio rectángulo es 6 y sus diagonales son perpendiculares, hallar el área mínima de la región limitada por el trapecio.

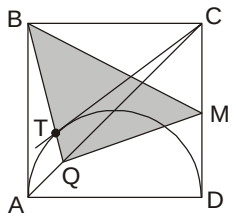
a) 12 b) 72 c) 36
d) 24 e) 8

57. En la figura mostrada, calcular el área de la región sombreada, siendo: $AB = 2\sqrt{2}$ m y AB = BC.



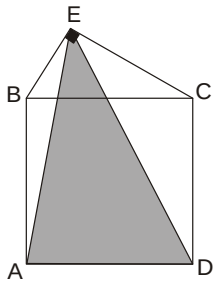
a) $6\sqrt{2}\,m^2$ b) $(\sqrt{3}-1)$ m^2 c) $2\sqrt{2}$ m^2
d) $(6\sqrt{3}-1)$ m^2 e) $2\sqrt{3}$ m^2

58. En la figura, si ABCD es un cuadrado, CM = MD, calcular el área de la región sombreada, siendo: AB = 4m. (T : punto de tangencia).



a) 2 m^2 b) 4 m^2 c) 5 m^2
d) 6 m^2 e) 7 m^2

59. Del gráfico mostrado, hallar el área de la región sombreada, si : BE = a, EC = b, $a^2+b^2+ab = 5$. ABCD : cuadrado.



a) 5 b) 5/2 c) 5/3
d) 25 e) 35

60. En un triángulo ABC inscrito en una circunferencia de centro "O", se trazan los diámetros $\overline{AD}$, $\overline{CF}$ y $\overline{BE}$, las áreas de las regiones triangulares BDC, AFB y AEC miden 5, 3 y 4m^2 respectivamente. Calcular el área de la región triangular ABC.

a) 10 m^2 b) 12 m^2 c) 14 m^2
d) 18 m^2 e) 15 m^2

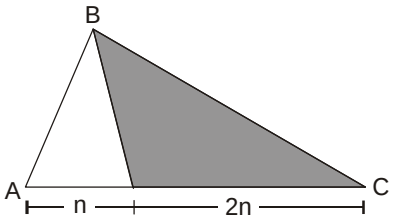
Claves

21.	c
22.	c
23.	a
24.	b
25.	b
26.	c
27.	b
28.	b
29.	b
30.	c
31.	c
32.	b
33.	c
34.	a
35.	c
36.	d
37.	a
38.	d
39.	b
40.	e

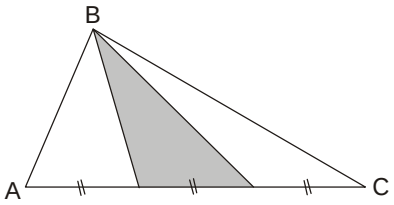
41.	a
42.	c
43.	b
44.	d
45.	a
46.	d
47.	a
48.	c
49.	b
50.	c
51.	a
52.	d
53.	e
54.	d
55.	e
56.	c
57.	b
58.	c
59.	b
60.	b

RELACIÓN DE ÁREAS DE REGIONES POLIGONALES

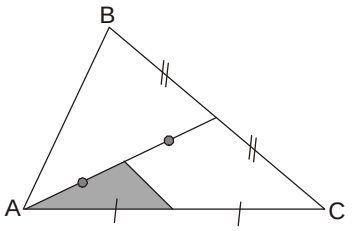
01. Si el área del triángulo ABC es de 90 dm^2, calcular el área de la región sombreada.



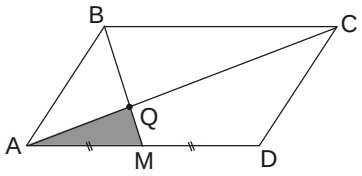
02. El área de la región sombreada es de $12dm^2$. Calcular el área de la región triangular ABC.



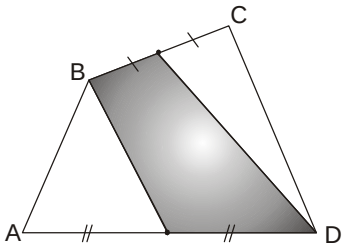
03. ¿Qué fracción del área de la región del triangular ABC, representa el área de la región sombreada?



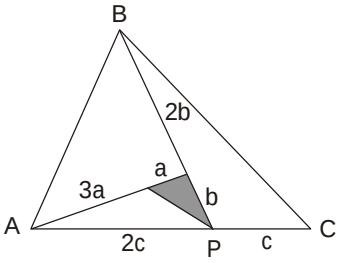
04. Si el área del paralelogramo ABCD es de $24cm^2$, calcular el área de la región sombreada.



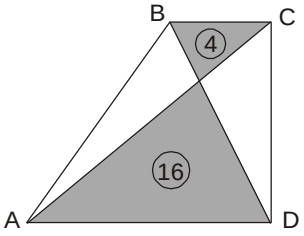
05. El área de la región cuadrangular ABCD es de 48 dm^2. Calcular el área de la región sombreada.



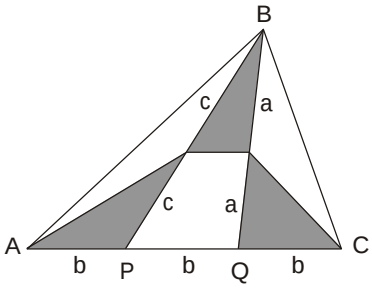
06. Si el área de la región del triángulo ABC es 36 u^2, calcular el área de la región sombreada.



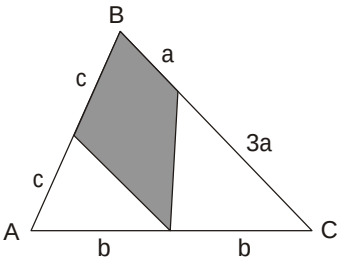
07. Calcular el área de la región del trapecio mostrado.



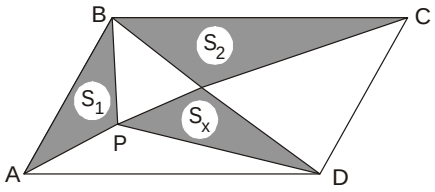
08. El área de la región triangular ABC es $24\,m^2$. Calcular el área de la región sombreada.



09. Si el área de la región del triángulo ABC es $40\,u^2$, calcular el área de la región sombreada.



10. En la figura, ABCD es un paralelogramo. Calcular S_x.



Practiquemos :

11. En un trapecio cuyas bases miden 3m y 1m, se traza una paralela a las bases para dividirlo en dos figuras equivalentes. ¿Cuál es la longitud de dicha paralela?

12. En un cuadrilátero convexo ABCD, se toma el punto medio M de la diagonal $\overline{AC}$. Calcular el área de la región triangular MBD, sabiendo que las áreas de la región de los triángulos ABD y BDC miden 40 y 60 m^2, respectivamente.

13. Sea un cuadrilátero ABCD; los puntos medios de sus lados determinan el paralelogramo PQRS; los puntos medios de los lados de éste determinan otro paralelogramo MNLT. Si los puntos medios de este último determinan un rombo que limita una región de $72m^2$, entonces, el área de la región del cuadrilátero ABCD, es :

14. En un triángulo ABC, se traza el segmento $\overline{BD}$ con D sobre el lado $\overline{AC}$. También trazamos el segmento $\overline{CE}$ con E sobre el lado $\overline{AB}$. Si sabemos que: $\frac{AB}{AC} = \frac{13}{36}$ y $\frac{CD}{AE} = \frac{12}{5}$, hallar : $\frac{\text{Área}(\Delta BDC)}{\text{Área}(\Delta AEC)}$.

15. Dado un triángulo equilátero cuya área de su región es $9\sqrt{3}\,u^2$. Se traza dos rectas paralelas a la base, que dividen al triángulo en tres regiones equivalentes. ¿Cuál es la longitud de la paralela más cercana a la base?

16. Dado un triángulo ABC, cuya área de su región es 18 m^2, se traza la altura $\overline{BH}$. Si la mediatriz de $\overline{AC}$ interseca a $\overline{BC}$ en N, calcular el área de la región cuadrangular ABNH.

17. En un triángulo ABC, se trazan las alturas $\overline{AH}$ y $\overline{CP}$. Calcular la razón entre el área de la región triangular PBH y el área de la región cuadrangular APHC, si además : m$\sphericalangle$ ABC = 53º.

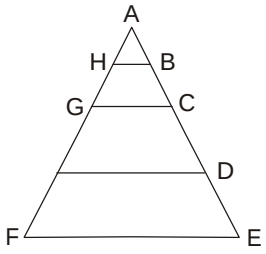
18. Hallar el área de las región de un triángulo isósceles ABC, sabiendo que :
AB = BC = 30 cm, y que la perpendicular a $\overline{BC}$ en su punto medio M, corta a $\overline{AB}$ en E y que :
$\frac{AE}{EB} = \frac{1}{5}$

19. Las diagonales de un trapecio dividen a éste en cuatro triángulos. Hallar el área del trapecio, si las áreas de los triángulos adyacentes a las bases son iguales a 1,69 cm^2 y 1,21 cm^2.

20. Se tiene un cuadrilátero ABCD, siendo "O" punto de la intersección de sus diagonales.
Sabiendo que :
OA = x, OB = 2x, OC = 8x, OD = 5x, y que el área de la región triangular BOC es igual a 48 m^2 ; el área de la región del cuadrilátero, en m^2, será :

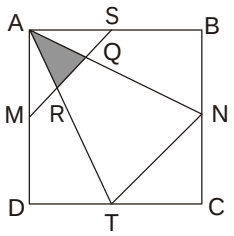
Problemas propuestos

21. En la figura, 2AB = AC = CD = DE y las rectas horizontales son paralelas. Sea :
x = área de la región triangular ABH y sea: z = área del cuadrilátero FGCE. Luego, $\frac{x}{z}$ es:



a) 1/16 b) 5/72 c) 1/14
d) 1/32 e) 3/32

22. La figura ABCD es un cuadrado de lado "a". El vértice A se une con los puntos medios de los lados $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$; luego se traza el segmento que une los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$. Hallar el área de la región triangular ARQ.



a) $a^2/9$ b) $3a^2/8$ c) $a^2/24$
d) $a^2/6$ e) $a^2/12$

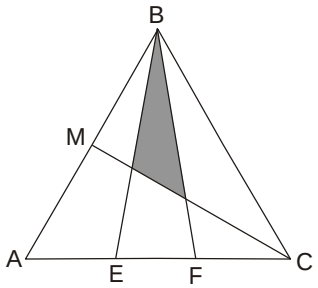
23. Se tiene un triángulo ABC inscrito en una circunferencia. La tangente en A, a la circunferencia, corta en P a la prolongación de $\overline{CB}$; si:
3AC.CP = AB.AP y el área de la región triangular APC es "k" unidades cuadradas. Hallar el área de la región triangular APB.

a) $\frac{K}{3}u^2$ b) $\frac{2K}{5}u^2$ c) $\frac{K}{7}u^2$
d) $\frac{K}{5}u^2$ e) $\frac{3}{4}K\,u^2$

24. Dos circunferencias se encuentran separadas y la distancia entre sus centros, A y B es 8 cm, siendo sus diámetros de 4 y 10 cm, respectivamente. De A, se traza una secante que corta en R y S a la otra circunferencia, donde RS = 6 cm. Si P es la proyección de R sobre $\overline{AB}$, calcular el área de la región triangular RPB.

a) $(18+4\sqrt{3})cm^2$ b) $(\frac{24+7\sqrt{3}}{8})\ cm^2$
c) $(\frac{12+7\sqrt{3}}{8})\ cm^2$ d) $(\frac{20+5\sqrt{3}}{4})\ cm^2$
e) $(\frac{28+4\sqrt{3}}{4})\ cm^2$

25. El área de la región del triángulo ABC es "S".
Si : AM = MB y AE = EF = FC, hallar el área de la región sombreada.

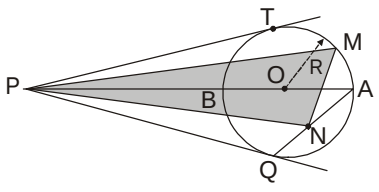


a) $\frac{S}{20}$ b) $\frac{3}{20}S$ c) $\frac{S}{10}$
d) $\frac{S}{8}$ e) $\frac{7S}{20}$

26. Dado un cuadrado ABCD sobre los lados $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ se toman los puntos M y N respectivamente tal que: $m\sphericalangle MAN = 45°$; $\overline{BD}$ interseca a $\overline{AM}$ y $\overline{AN}$ en los puntos P y Q respectivamente.
Si : $\{\overline{PN}\} \cap \{\overline{MQ}\} = F$; si la prolongación de $\overline{AF}$ corta a $\overline{MN}$ en "k", tal que: AF = 10 y FK = 2. Hallar el área de la región triangular MCN.

a) 12 b) 24 c) 20
d) 40 e) 42

27. Del gráfico :
$m\sphericalangle TPQ = 60°$, $m\overset{\frown}{TM} = m\overset{\frown}{AM}$, AN = NQ. Calcular el área de la región sombreada en función de R.



a) $\frac{7}{8}\sqrt{3}\,R^2$ b) $\sqrt{3}\,R^2$ c) $\sqrt{5}\,R^2$
d) $\frac{7}{3}\sqrt{5}\,R^2$ e) $\frac{18\sqrt{7}}{5}R^2$

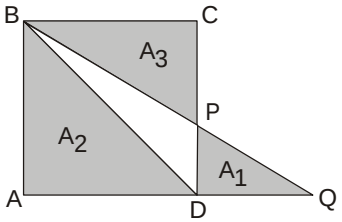
28. En un triángulo ABC, se trazan $\overline{BP}$ y $\overline{BQ}$ perpendiculares a las bisectrices exteriores de los ángulos A y C respectivamente. Luego, se traza $\overline{IM}$ perpendicular a $\overline{AC}$ (I: incentro del triángulo ABC). Calcular el área de la región triangular ABC, si el área de la región PIQM 64 u^2.

a) 64 u^2 b) 32 u^2 c) 16 u^2
d) 128 u^2 e) 24 u^2

29. Graficar el cuadrilátero ABCD y ubicar M y N puntos medios de $\overline{BD}$ y $\overline{AC}$ respectivamente. En $\overline{MN}$, ubicar el punto P. Si las áreas de las regiones triangulares DAP, APB, CPD y CPB son S_1, S_2, S_3 y S_4 respectivamente, hallar la relación que cumplen S_1, S_2, S_3 y S_4.

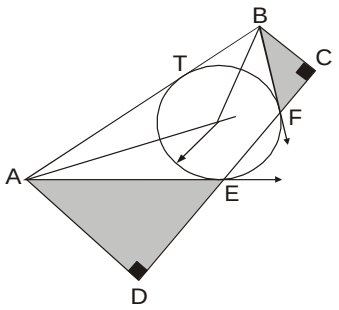
a) $S_1.S_3 = S_2.S_4$ b) $S_1 + S_2 = S_3 + S_4$
c) $S_2.S_3 = S_3.S_4$ d) $S_2 + S_3 = S_1 + S_4$
e) $\frac{S_1}{S_2} = \frac{S_3}{S_4}$

30. La figura muestra al cuadrado ABCD donde $\overline{PC} \cong \overline{DQ}$. Indicar la relación correcta entre las áreas de las regiones sombreadas.



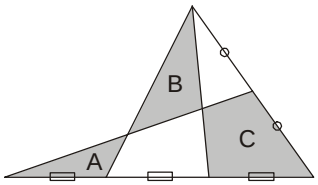
a) $A_3 = A_2 - A_1$ b) $A_3 = \frac{A_2 - A_1}{2}$
c) $A_3^2 = A_2^2 - A_1^1$ d) $A_3 = \frac{A_2 + A_1}{2}$
e) $(A_3)^2 = (A_2)(A_1)$

31. En la figura: 5BT = 3AT. Calcular la razón de las áreas de las regiones triangulares BCF y ADE.
(T, E y F $\rightarrow$ puntos de tangencia).



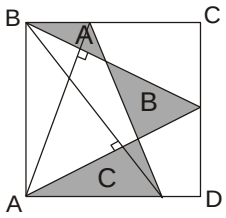
a) 3/5 b) 1/3 c) 1/2
d) 9/25 e) 5/8

32. En la figura, A, B y C representan las áreas de las regiones sombreadas. Determinar la relación correcta entre dichas regiones.



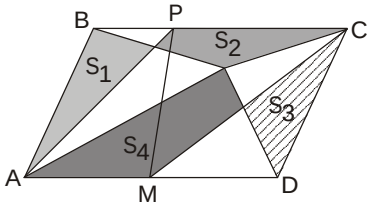
a) $B = \sqrt{AC}$ b) C = A+B c) $C = \sqrt{AB}$
d) B =4ABC e) A = 2C-B

33. Si ABCD es un cuadrado, encontrar la relación entre A, B y C.



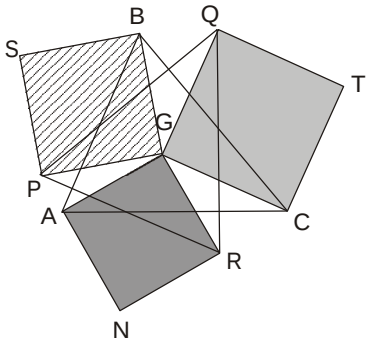
a) A + B = C b) B + C = A c) B + C = 2A
d) A + C = B e) A + C = 2B

34. Si ABCD es romboide, hallar la relación de las áreas : S_1, S_2, S_3 y S_4; si : $\overline{MP} // \overline{AB}$.



a) $S_1 + S_2 = S_3 + S_4$ b) $S_1 + S_4 = S_2 + S_3$
c) $S_1 + S_3 = S_2 + S_4$ d) $S_1 . S_2 = S_3 . S_4$
e) $S_1 . S_3 = S_2 . S_4$

35. Si "G" es el baricentro del triángulo ABC y además $(PQ)^2 + (PR)^2 + (QR)^2 = 3$, hallar la suma de las áreas de las regiones de los cuadrados mostrados.



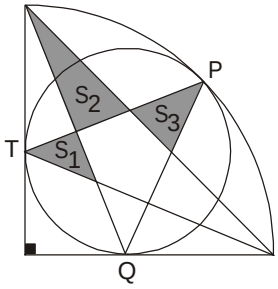
a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

36. Exteriormente a una recta, se marca el punto "O" y se traza los rayos $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ y $\overrightarrow{OD}$ (A, B, C, D están sobre la recta y forman una cuaterna armónica) sobre $\overline{OA}$ y $\overline{OC}$ se toman los puntos E y F.
Si: $\{\overline{EF}\} \cap \{\overline{OB}\} = M$ y $\overline{EF} // \overline{OD}$. Hallar:

$$\frac{\text{Área del triángulo EOM}}{\text{Área del triángulo FOM}}$$

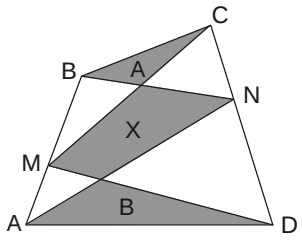
a) 1 b) 1/2 c) 1/3
d) 1/4 e) 1/5

37. Si T, P y Q son puntos de tangencia, hallar la relación entre S_1, S_2 y S_3.



a) $S_2 = S_1 + S_3$ b) $3S_3 = 2(S_1 + S_2)$
c) $2S_2 = 3S_1 - S_2$ d) $3S_1 = S_2 + S_3$
e) $2S_1 = S_2 + S_3$

38. Si: (AM).(ND) = (BM).(CN); hallar "X" en función de A y B.



a) A + 2B b) 2A + B c) 2(A + B)
d) A + B e) 3(A + B)/2

39. En un triángulo ABC, el segmento que une el incentro y el baricentro es paralelo a la base $\overline{AC}$ y el inradio mide 2. Calcular el área de la región triangular ABC, si: AC = 8.

a) 21 b) 24 c) 18
d) 16 e) 12

40. Los lados de un triángulo miden 15u, 20u y 25u. Calcular el área de la región triangular formada por el incentro, baricentro y circuncentro del triángulo.

a) 5 b) 2,5 c) 5/3
d) 10/3 e) 25/12

41. Calcular el área de la región triangular correspondiente a un triángulo isósceles, en el cual la base mide 16 cm y el circunradio 10 cm, siendo el triángulo obtusángulo.

a) 32 cm^2 b) 16 cm^2 c) 48 cm^2
d) 30 cm^2 e) 34 cm^2

42. Hallar el área de la región del hexágono regular circunscrito a una circunferencia, sabiendo que el área de la región del hexágono regular inscrito en la misma circunferencia es 540.

a) 840 b) 720 c) 650
d) 600 e) 540

43. Se tiene un hexágono regular de 4m de lado, se construyen circunferencias de 2m de radio, tangentes exteriores a cada lado en su punto medio. ¿Cuál es el área de la región del hexágono obtenido al unir los centros de la circunferencia?

a) $9 + 6\sqrt{3}$ b) $18 + 2\sqrt{3}$
c) $36 + 24\sqrt{3}$ d) $27 + 18\sqrt{3}$
e) $45 + 30\sqrt{3}$

44. En un triángulo ABC, los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$, miden 13u, 14u y 15u, respectivamente. Se trazan las alturas $\overline{AD}$ y $\overline{CE}$, hallar el área de la región cuadrangular EBDO, siendo "O" el circuncentro del triángulo ABC.

a) $\frac{375}{4}$ b) $\frac{375}{8}$ c) $\frac{375}{16}$
d) $\frac{375}{32}$ e) 21

45. Las diagonales de un rombo son proporcionales a 2 y 3, respectivamente. Calcular la diagonal menor, si el área de la región romboidal es 48 m^2.

a) 12 m b) 8 m c) 10 m
d) 6 m e) 9 m

46. Calcular el área de la región que encierra un hexágono regular inscrito en una circunferencia de 4 cm de radio.

a) $18\sqrt{3}\ cm^2$ b) $24\sqrt{2}\ cm^2$ c) 20 cm^2
d) $24\sqrt{3}\ cm^2$ e) $16\sqrt{7}\ cm^2$

47. Se tiene un rectángulo de 60 cm^2 de área. Si los lados son números enteros en (cm), el perímetro mínimo posible en cm, es :

a) 38 cm b) 30 cm c) 34 cm
d) 32 cm e) 36 cm

48. En un cuadrado ABCD, se traza interiormente la semicircunferencia de diámetro $\overline{AD}$, luego, se traza la tangente $\overline{CP}$ a dicha semicircunferencia (P es punto de tangencia).
Hallar el área de la región cuadrangular ACBP.
Si : AD = 10.

a) 50 b) 45 c) 35
d) 40 e) 30

49. En un rombo ABCD, las proyecciones de las diagonales $\overline{BD}$ y $\overline{AC}$ sobre $\overleftrightarrow{AD}$, tiene como longitudes "m" y "K", respectivamente. Hallar el área de la región limitada por el rombo.

a) $(\frac{K-m}{2})\sqrt{Km}$

b) $(\frac{K+m}{2})\sqrt{Km}$

c) $(\frac{K+m}{3})\sqrt{Km}$

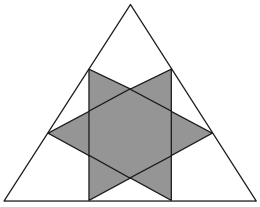
d) $(\frac{K+m}{2})(Km)$

e) $(K+m)(Km)$

50. En un cuadrado ABCD por el vértice B se traza la recta L_1, no secante al cuadrado y por el vértice D, se traza la recta L_2 que interseca al lado $\overline{AB}$ en Q, de modo que :
$\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$ se intersecan perpendicularmente en P, PB = b y la distancia del vértice A a la recta L_2 es "a".
Hallar el área de la región cuadrada ABCD.

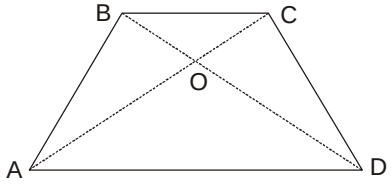
a) $2b^2+2ab+a^2$ b) $2a^2+2ab+b^2$
c) $(2a+b)^2$ d) $(a+2b)^2$
e) $(a+b)^2$

51. Dado un triángulo equilátero de 3m de lado, se dividen en tres segmentos iguales a los lados del triángulo y se unen los puntos de división formándose una estrella, como se muestra en la figura.
Calcular el área de la estrella.



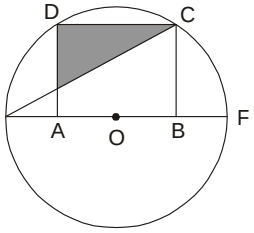
a) $\frac{5}{4}\sqrt{3}\ m^2$ b) $(1+\sqrt{3})\ m^2$ c) $(\sqrt{3}-1)\ m^2$
d) $\sqrt{3}\ m^2$ e) $\frac{7}{4}\sqrt{3}\ m^2$

52. En el trapecio ABCD, las diagonales determinan los triángulos AOD y BOC, de áreas 49 m^2 y 25 m^2, respectivamente. Hallar el área del trapecio.



a) 135 m^2 b) 140 m^2 c) 144 m^2
d) 148 m^2 e) 180 m^2

53. Hallar el área de la región sombreada, si el radio de la circunferencia es 6, el segmento BF = 2 y ABCD es un rectángulo.

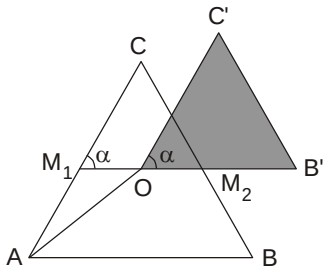


a) 12,1 m^2 b) 12,3 m^2 c) 15,6 m^2
d) 16,4 m^2 e) 14,3 m^2

54. En una circunferencia de radio "r", se desea inscribir un rectángulo, tal que este rectángulo circunscriba a otra circunferencia. Hallar el área de la región del rectángulo.

a) $2r^2$ b) r^2 c) $3r^2$
d) $\frac{3r^2}{2}$ e) $\frac{r^2}{2}$

55. Hallar el área de la región triangular OB'C', si :
AB = 4 = BC, $M_1O=\frac{1}{4}AB$, AC = 6.
M_1 y M_2 son puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, respectivamente.
$\overline{AC}\ //\ \overline{OC'}$ y $\overline{BC}\ //\ \overline{B'C'}$; $\overline{AO}=\overline{OC'}$.



a) $(29/3)\sqrt{7}$ b) $(29/6)\sqrt{7}$
c) $(29/7)\sqrt{7}$ d) $(29/2)\sqrt{7}$
e) $(29/24)\sqrt{7}$

56. Sobre una recta se toman tres puntos : A, B, C (en ese orden), tales que :
AB = a, BC = b. Con dos puntos D y E exteriores a la recta y a un mismo lado, con respecto a ella se construyen dos triángulos ABD y BCE.
Hallar el área cuadrangular ADEC.

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}(a^2+b^2+ab)$

b) $\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+b^2+ab)$

c) $\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+b^2)$

d) $\frac{\sqrt{3}}{3}(a^2-b^2-ab)$

e) $\frac{\sqrt{3}}{2}(a^2-b^2+ab)$

57. El ancho de una finca rectangular es 1/4 del largo. Si se prolongase ésta 5 m y aquélla 3 m, la finca tendría un aumento de 185 m^2.
¿Qué dimensiones tiene dicha finca?

a) 10 m y 40 m. b) 20 m y 80 m.
c) 15 m y 60 m. d) 10 m y 45 m.
e) 10 m y 80 m.

58. Sean dos circunferencias tangentes exteriormente de radios 10 dm y 30 dm.
Determinar el área del triángulo isósceles circunscrito a las dos circunferencias.

a) $1800\sqrt{3}\ dm^2$ b) $1200\sqrt{3}\ dm^2$

c) $900\sqrt{3}\ dm^2$ d) $180\sqrt{3}\ dm^2$

e) $2700\sqrt{3}\ dm^2$

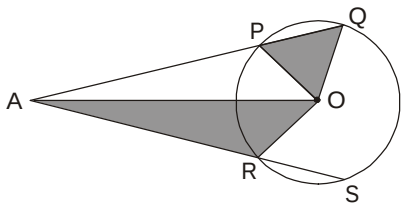
59. Sea A el área de un triángulo Δ, A_1 el área del triángulo Δ_1 obtenido uniendo los puntos medios de los lados del triángulo Δ; análogamente sea A_2 el área del triángulo Δ_2, obtenido uniendo los puntos medios de los lados del triángulo Δ_1; y así sucesivamente.
Entonces, la suma de las áreas :

$$A + A_1 + A_2 + ... \text{, es:}$$

a) $\frac{3}{4}A$ b) $\frac{4}{3}A$ c) A

d) $\frac{3}{2}A$ e) 2A

60. Se tiene un círculo de centro "O" y un punto "A" externo a él (ver figura).
Sean : PQ = RS = 16 m; el área de la región triangular OPQ = 48 m^2 y OA = $\sqrt{157}$ m.
Calcular el área de la región del triángulo AOR.



a) $48\ m^2$ b) $36\ m^2$ c) $24\ m^2$
d) $9\ m^2$ e) $12\ m^2$

Claves

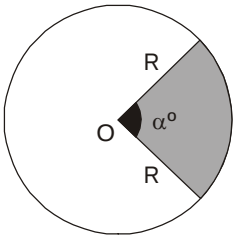
21.	d
22.	c
23.	a
24.	b
25.	b
26.	b
27.	a
28.	d
29.	d
30.	d
31.	d
32.	b
33.	d
34.	c
35.	a
36.	a
37.	a
38.	d
39.	b
40.	e

41.	a
42.	b
43.	c
44.	c
45.	b
46.	d
47.	d
48.	d
49.	b
50.	b
51.	d
52.	c
53.	e
54.	a
55.	e
56.	b
57.	a
58.	e
59.	b
60.	d

Capítulo

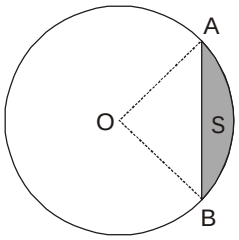
15 ÁREAS DE REGIONES CURVAS

I. SECTOR CIRCULAR



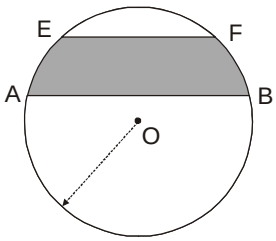
$$As = \frac{\alpha \pi R^2}{360^o}$$

II. SEGMENTO CIRCULAR



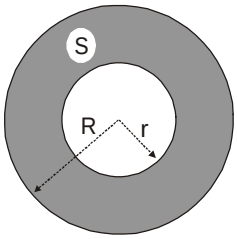
$S = \diamondsuit - \triangleleft$

III. FAJA O ZONA CIRCULAR



Si : $\overline{EF} // \overline{AB}$

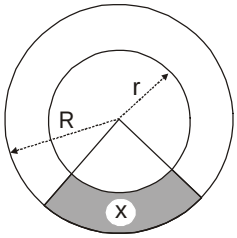
IV. CORONA O ANILLO CIRCULAR



$$S = \pi R^2 - \pi r^2$$

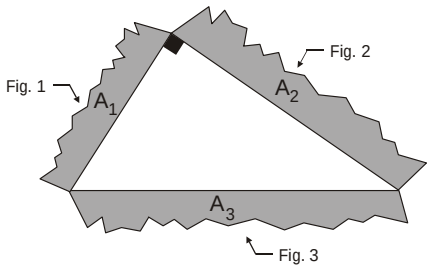
$$S = \pi (R^2 - r^2)$$

V. TRAPECIO CIRCULAR



$x = \triangle - \triangle$

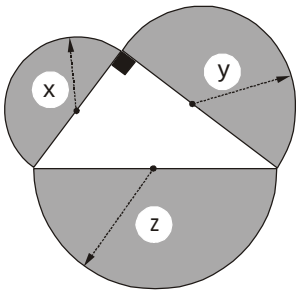
PROPIEDAD DE LAS FIGURAS SEMEJANTES



Si : fig. 1 ~ fig. 2 ~ fig. 3

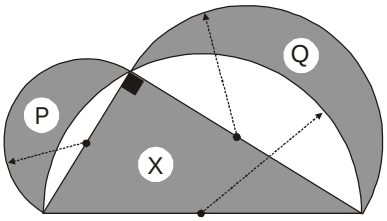
$$A_3 = A_1 + A_2$$

Caso Particular :



$z = x + y$

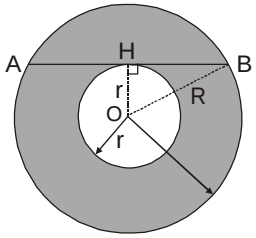
TEOREMA DE LAS LÚNULAS DE HIPÓCRATES



$X = P + Q$

Observaciones :

* ***En la corona circular***



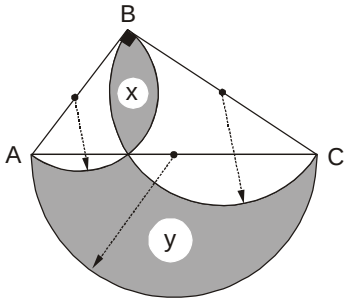
$\triangle OHB$:

$$R^2 = r^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2$$

$$R^2 - r^2 = \frac{AB^2}{4}$$

$$\therefore \text{Área} = \frac{\pi}{4}(AB)^2$$

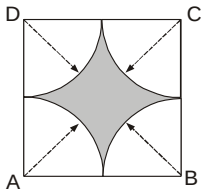
* ***En el triángulo rectángulo***



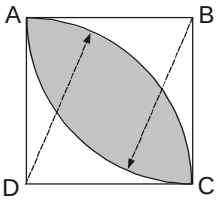
$A_{ABC} = y - x$

Test de aprendizaje preliminar

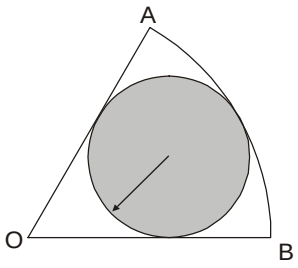
01. Calcular el área de la región sombreada, si : AB = 20 cm. Además, ABCD es un cuadrado.



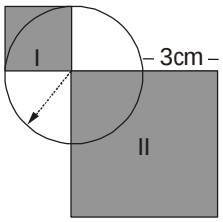
02. En la figura, calcular el área de la región sombreada, si : AB = 2m, siendo ABCD un cuadrado.



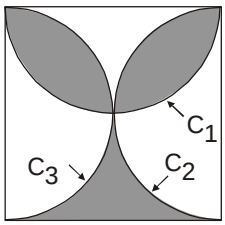
03. Hallar el área de la región sombreada, si : m$\sphericalangle$ AOB = 60º y OA = OB = 12.



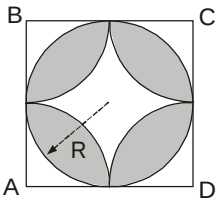
04. Si el área del círculo es $9\pi cm^2$, ¿cuál es la suma de las áreas de las regiones cuadradas I y II?



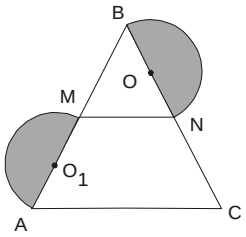
05. Si : C_1, C_2 y C_3 son semicírculos de radios iguales, entonces, el área de la figura sombreada en función de lado L del cuadrado, es:



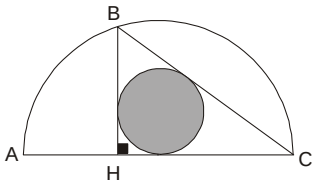
06. En la figura, el área de la región sombreada es: (ABCD: cuadrado).



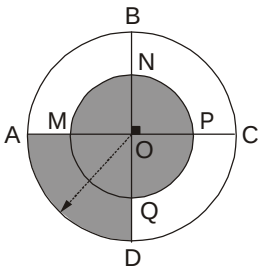
07. En la figura, $\overline{MN} // \overline{AC}$; $BN = \frac{2}{3}(AM)$; BM = 12, CN = 32 y O, O_1 son centros de las respectivas semicircunferencias.
Hallar el área de la región sombreada.



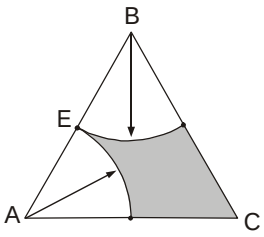
08. Hallar el área de la región sombreada, siendo $\overline{AC}$ el diámetro. AB = 15 y BC = 20.



09. En el círculo mayor, el diámetro es 4m. M, N, P y Q son puntos medios. Hallar el área de la región sombreada.



10. En el gráfico: AE = EB = 6 dm, calcular el área de la región sombreada, si además: BC = AC = 12 dm.



Practiquemos :

11. Un sector circular tiene un ángulo de 60° y 15m de radio. Hallar el área del círculo inscrito en el sector circular.

12. Si el área de un círculo se duplica al aumentar su radio en $(\sqrt{2}-1)$; hallar el radio original.

13. Un triángulo equilátero cuyo lado mide 4m; su región tiene igual área que un círculo cuyo radio mide R. ¿Cuál es el valor de R?

14. Hallar el área limitada por dos circunferencias tangentes interiormente sabiendo que la distancia entre sus centros es de 10u y la suma de sus longitudes es de 100u.

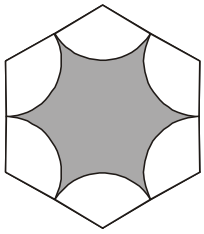
15. Las áreas que limitan dos circunferencias concéntricas son 78,5 m^2 y 28,26 m^2 respectivamente; se traza una cuerda a la circunferencia mayor que es tangente a la menor, entonces la longitud de esa cuerda es: (considerar que $\pi = 3{,}14$).

16. Un sector circular tiene un área igual a $25\pi cm^2$ y representa el 4% del área del círculo. El 5% de la longitud de la circunferencia correspondiente en metros es:

17. Dado un triángulo equilátero ABC, de 4 cm de lado, hallar el área de la región comprendida entre la circunferencia circunscrita y la circunferencia inscrita a dicho triángulo.

18. Sean las regiones A_1 y A_2 limitadas por las circunferencias iguales tal que el área de $A_1 \cap A_2$ es $100m^2$ y el área de $A_1 \cup A_2$ es $400m^2$. Entonces, el radio de las circunferencias iguales es:

19. Los vértices de un hexágono regular son los centros de 6 circunferencias congruentes y tangentes, (según muestra la figura). Calcular el área de la región sombreada en función de lado "a" del hexágono.



20. Hallar el área de faja circular cuyas bases son el lado del hexágono regular y del triángulo equilátero inscritos, respectivamente, además el radio del círculo es $R = \sqrt{6}$.

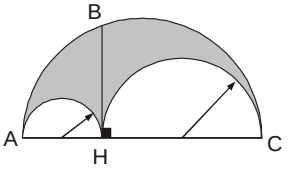
Problemas propuestos

21. Dado los círculos C_1 y C_2, con áreas a_1 y a_2, respectivamente, si la longitud de la circunferencia C_2 es igual al diámetro de C_1, el área a_2 será:

a) $\frac{a_1}{\sqrt{\pi}} u^2$ b) $\frac{a_1^2}{\pi}$ c) $\frac{a_1^2}{\pi^2}$

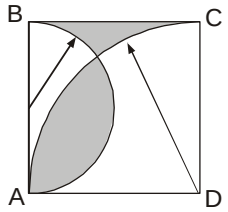
d) $\frac{a_1}{\pi^2}$ e) $\frac{a_1}{\pi}$

22. En la figura, $\overline{AC}$ es diámetro. Hallar el área de la región sombreada. Si : BH = 6.



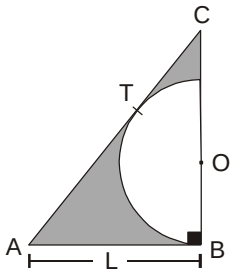
a) 6π b) 9π c) 12π
d) 18π e) 20π

23. Hallar la diferencia de las áreas de las regiones sombreadas, si el lado del cuadrado ABCD mide 4.



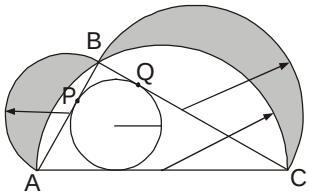
a) $3\pi - 8$ b) $2(3\pi - 8)$ c) $6\pi - 8$
d) $6\pi + 8$ e) $2(6\pi - 1)$

24. En la figura, hallar el área de la región sombreada, comprendida entre el triángulo ABC, recto en B, y la semicircunferencia, sabiendo que el arco BT es de 120°. (T : punto de tangencia).



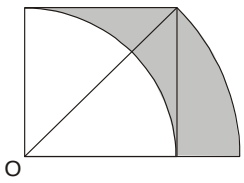
a) $(\frac{3\sqrt{3}-\pi}{6})L^2$ b) $(\frac{2\sqrt{3}-\pi}{6})L^2$ c) $(\frac{\sqrt{3}+\pi}{4})L^2$
d) $(\frac{\pi-\sqrt{3}}{6})L^2$ e) $(\frac{\pi+1}{4})L^2$

25. En la figura, hallar el área de la región sombreada, si: AP = 3 y QC = 4. P y Q : puntos de tangencia.



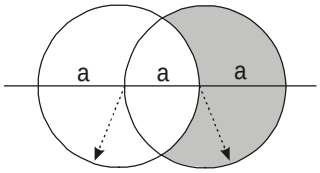
a) $2\sqrt{3}$ b) 12 c) 24
d) $4\sqrt{3}$ e) 18

26. Hallar el área de la región sombreada comprendida entre dos circunferencias de centro "O" y un cuadrado con un vértice en "O" y lado 10 m.



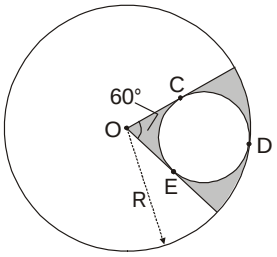
a) $50(1-\frac{\pi}{4})m^2$ b) $(45+25\frac{\pi}{4})$
c) 30 d) $(50+\pi)$
e) 50

27. Calcular el área de la región sombreada.



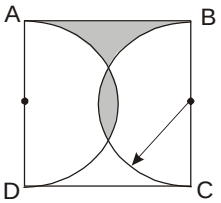
a) $\frac{\pi a^2}{3}$ b) $\frac{\pi a^2}{3}+\sqrt{3}\,a^2$
c) $(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2})a^2$ d) $(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2})a^2$
e) $(\frac{2\pi}{3}-\sqrt{3})a^2$

28. Si: C, D y E son puntos de tangencia, hallar el área de la región sombreada.



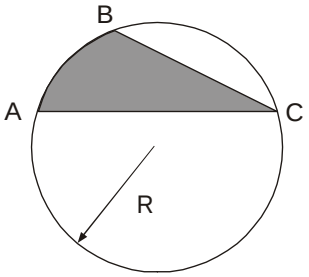
a) $\pi R^2/18$ b) $\pi R^2/9$ c) $\pi R^2/12$
d) $\pi R^2/16$ e) $\pi R^2/8$

29. En el rectángulo ABCD, $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ son diámetros. Hallar el área de la región sombreada, si : $AB = 4\sqrt{3}$ y AD = 8.



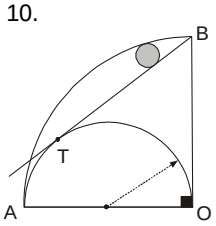
a) $2\sqrt{3}$ b) $4\sqrt{3}$ c) 8
d) $4-2\sqrt{3}$ e) $8\sqrt{3}$

30. En la figura mostrada, si: $m\widehat{AB}=72°$ y $m\widehat{BC}=54°$, hallar el área de la región sombreada. Si : $R=\sqrt{5}$.



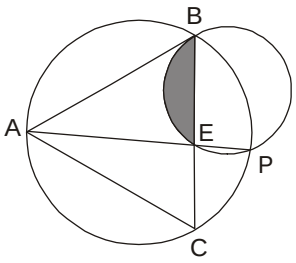
a) π b) 2π c) 3π
d) 4π e) $\pi/3$

31. Hallar el área máxima del círculo, si :
AO = OB = 10.



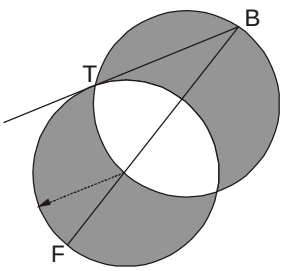
a) π b) 2π c) $\sqrt{3}\pi$
d) $\sqrt{2}\pi$ e) 3π

32. Hallar el área de la región sombreada, si el triángulo ABC es equilátero y $BE=\sqrt{3}$. (A, E, P son puntos colineales).



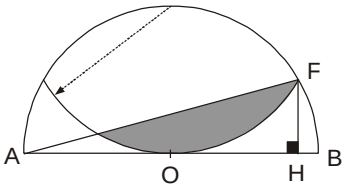
a) $\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}$ c) $\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}$
d) $\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}$ e) $\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{6}$

33. Si : BT = 24 y BF = 36, hallar la diferencias de las áreas sombreadas. (T : punto de tangencia).



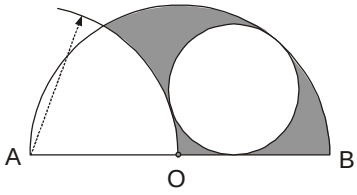
a) 169π b) 85 c) 85π
d) 69 e) 69π

34. Hallar el área de la región sombreada, si: $\overline{AB}$ es diámetro, OA = OB.
FH = 2. (O : punto de tangencia).



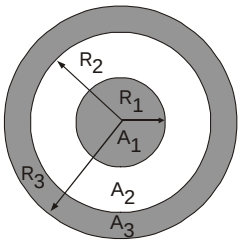
a) $2\pi-1$ b) $4\pi-1$ c) $4\pi-4$
d) $2\pi-8$ e) $4\pi-8$

35. Hallar el área de la región sombreada, si:
AO = OB = R. ($\overline{AB}$: diámetro).



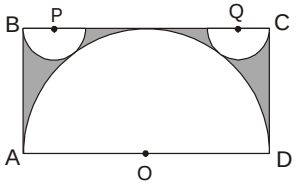
a) $\frac{R^2}{8}(6\sqrt{3}-\pi)$ b) $\frac{R^2}{24}(8\sqrt{3}-3\pi)$
c) $\frac{R^2}{48}(12\sqrt{3}-\pi)$ d) $\frac{R^2}{36}(18\sqrt{3}-5\pi)$
e) $R^2(5\sqrt{3}-\pi)$

36. ¿Cuál debe ser la relación de R_1, R_2 y R_3 para que las áreas del círculo A_1 (interior) y los dos anillos A_2 y A_3, respectivamente, sean iguales entre sí?



a) $R_1=\frac{R_2}{2}=\frac{R_3}{3}$ b) $\frac{R_1}{\sqrt{3}}=\frac{R_2}{\sqrt{2}}=R_3$
c) $R_1=\frac{R_2}{\sqrt{2}}=\frac{R_3}{\sqrt{3}}$ d) $\frac{R_1}{2}=\frac{R_2}{4}=\frac{R_3}{5}$
e) $\frac{R_1}{3}=\frac{R_2}{5}=\frac{R_3}{7}$

37. En la figura P, Q y O son centros de los semicírculos, si el rectángulo ABCD tiene perímetro 24 cm, el área de la región sombreada será de:

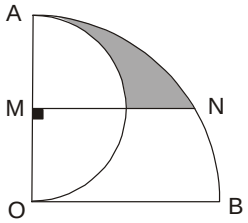


a) $(32-6\pi)cm^2$ b) $(26-6\pi)$

c) $(9\pi-23)$ d) $(12\pi-32\pi)$

e) $(32-9\pi)$

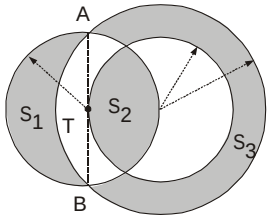
38. La figura muestra un cuarto de círculo y un semicírculo AM = MO = $2\sqrt{3}$. Calcular el área de la región sombreada.



a) $5\pi-3\sqrt{3}$ b) $4\pi-2\sqrt{3}$ c) $5\pi-6\sqrt{3}$

d) 5π e) $5\pi-5\sqrt{3}$

39. En el gráfico: es diámetro. Si: S_1, S_2 y S_3 representan las áreas de las regiones sombreadas. ¿Qué relación existe entre S_1, S_2 y S_3?

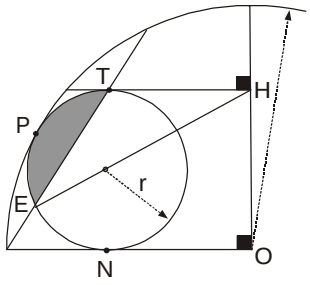


a) $2S_3 = S_2+S_1$ b) $S_3 - S_2 = S_1$

c) $S_1 . S_2 = S_3$ d) $S_2 + S_3 = 2S_1$

e) $2S_1+S_2=S_3$

40. Calcular el área de la región sombreada, si: NO = $\sqrt{3}$ y EH = 3. (T, P y N : puntos de tangencia).



a) $(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4})$ b) $(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4})$ c) $(\frac{3\pi}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2})$

d) $(\frac{3\pi}{4}-\sqrt{2})$ e) $(\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2})$

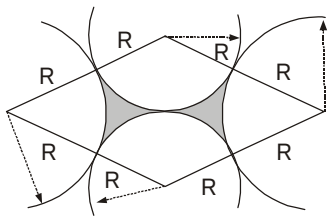
41. Un jardín circular de 12 m de diámetro está sembrado de pasto; pero es atravesado por un camino pavimentado recto de 3m de ancho, de modo que uno de sus bordes pasa por el centro. En consecuencia, el área sembrada, en metros cuadrados, es :

a) $35\pi-9\sqrt{3}$ b) $30\pi+9\sqrt{3}$

c) $35\pi+9\sqrt{3}$ d) $30\pi-9\sqrt{3}$

e) $30\pi-6\sqrt{3}$

42. Los vértices de un rombo, de lado igual a una de sus diagonales son los centros de cuatro circunferencias congruentes y tangentes. Calcular el área de la región sombreada en función de radio R.

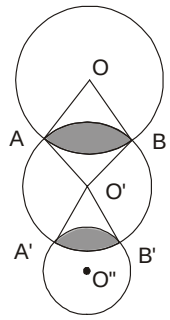


a) $2R^2(\sqrt{3}-\pi)$ b) $R^2(\sqrt{3}-\pi)$

c) $2R^2\sqrt{3}\pi+3R^2$ d) $R^2(2\sqrt{3}-\pi)$

e) $\frac{R^2}{2}(\sqrt{3}-\pi)$

43. Hallar el área de la región sombreada indicada en la figura, si se sabe que la medida del ángulo AOB y la del ángulo A'O'B' es 60°, los segmentos $\overline{O'A}$, $\overline{O'B}$ son tangentes a la circunferencia con centro O y radio R, y los segmentos $\overline{O''A'}$, $\overline{O''B'}$ son tangentes a la circunferencia de centro O'.

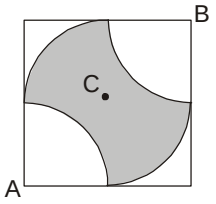


a) $R^2(10\pi-12\sqrt{3})$ b) $\frac{R^2}{9}(10\pi+12\sqrt{3})$

c) $\frac{R^2}{9}(10\pi-12\sqrt{3})$ d) $\frac{R^2}{27}(10\pi-12\sqrt{3})$

e) $\frac{R^2}{27}(10\pi+12\sqrt{3})$

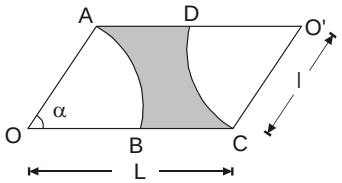
44. La siguiente figura es un cuadrado de lado "a". Las curvas son arcos de circunferencias de radio a/2 con centro en los puntos A, B y en el centro C del cuadrado. ¿Cuál es el área de la región sombreada?



a) $\frac{a^2}{4}$ b) $\frac{2a^2}{3}$ c) $\frac{a^2}{3}$

d) $\frac{3a^2}{4}$ e) $\frac{a^2}{2}$

45. Hallar el área sombreada de la figura, donde "α" está expresado en radianes, CO'D y AOB son sectores circulares y OAO'C es un paralelogramo.

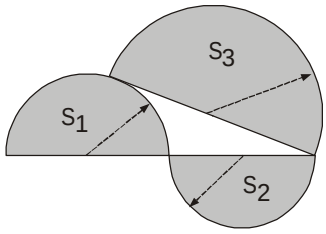


a) $l(LSen\alpha-\alpha)$ b) $l(l\,LSen\alpha-\alpha L)$

c) $l(LSen\alpha-l\,\alpha)$ d) $l(LSen\alpha-\alpha)$

e) $\frac{1}{3}l\,LSen\alpha$

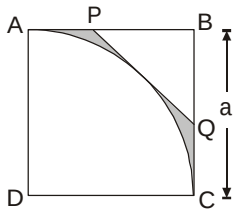
46. En el gráfico, se tienen semicírculos. Si : $S_1 = 9m^2$ y $S_2 = 4m^2$, hallar : S_3.



a) 7 m^2 b) 9 c) 10

d) 12 e) 14

47. Hallar el área de la región sombreada si ABCD es un cuadrado de lado "a" y $\overline{PQ}$ es tangente al arco AC (de centro D), en su punto medio.



a) $[\frac{8\sqrt{2}-8+\pi}{4}]a^2$ b) $[\frac{8\sqrt{2}+8-\pi}{4}]a^2$

c) $[\frac{8\sqrt{2}+6+\pi}{4}]a^2$ d) $[\frac{8\sqrt{2}+8}{3}]a^2$

e) $[\frac{8\sqrt{2}-8-\pi}{4}]a^2$

48. ABC es un triángulo obtusángulo con $AB = 2\sqrt{2}$, $BC = 2\sqrt{10}$, AC = 8. C_1 es una circunferencia circunscrita a ABC; C_2 y C_3 son dos circunferencias concéntricas con C_1, siendo $\overline{AB}$ tangente a C_2 y $\overline{AC}$ tangente a C_3. Determinar el área del anillo circular limitado por C_2 y C_3.

a) 10π b) 13π c) 14π

d) 16π e) 20π

49. Dadas tres circunferencias de radio $\sqrt{2}$, tangente entre sí dos a dos. Calcular el área comprendida entre las tres circunferencias.

a) $\sqrt{2}+\pi$ b) $3\sqrt{2}-\pi$ c) $3\sqrt{2}+\pi$

d) $2\sqrt{3}+\pi$ e) $2\sqrt{3}-\pi$

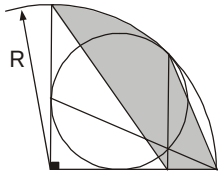
50. Tomando como diámetro la altura de un triángulo equilátero de lado "4a", se traza una circunferencia. Calcular el área común que encierran ambas figuras.

a) $(\frac{a^2}{2})(3\sqrt{3}+\pi)$ b) $(\frac{a^2}{2})(\pi+\sqrt{3})$

c) $a^2(2\pi-3\sqrt{3})$ d) $(\frac{a^2}{2})(3\sqrt{3}+2\pi)$

e) $a^2(\sqrt{3}-\pi)$

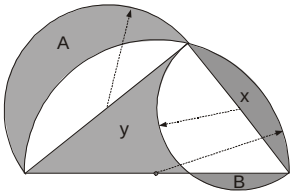
51. En la figura dada, hallar el área de la región sombreada en función de R.



a) $\pi R^2/7$ b) $\pi R^2/6$ c) $\pi R^2/8$

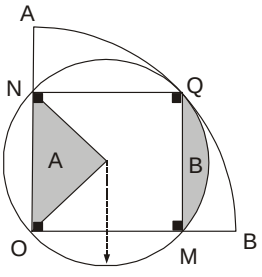
d) $\pi R^2/9$ e) $\pi R^2/10$

52. Si : A + B = k, calcular : x + y.



a) K b) 2K c) 3K
d) K/2 e) K/3

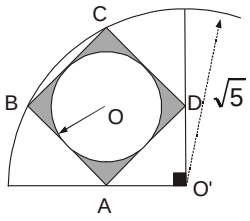
53. Hallar A + B, si : AOB es un cuadrante y NA = 2K y MB = K. Si "Q" es punto de tangencia.



a) $\frac{185\pi}{36}k^2$ b) $\frac{185\pi}{144}k^2$ c) $\frac{285\pi}{36}k^2$

d) $\frac{37\pi}{360}k^2$ e) $\frac{\pi}{12}k^2$

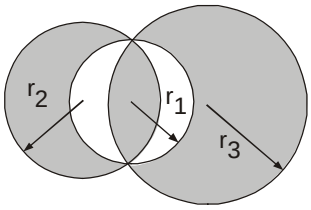
54. Se muestra la circunferencia de centro "O" inscrita en el cuadrado ABC. Calcular el área de la región sombreada.



a) $\frac{4+\pi}{5}$ b) $\frac{4+\pi}{3}$ c) $\frac{3-\pi}{2}$

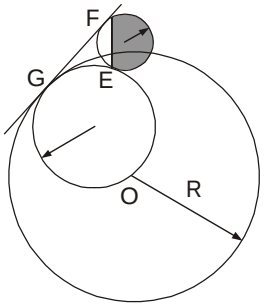
d) $(\frac{4-\pi}{2})$ e) $(4-\frac{\pi}{2})$

55. Calcular el área de la región sombreada. Si : r_1 = 3m, r_2 = 4m, r_3 = 5m.



a) 27π b) 28π c) 30π
d) 32π e) 36π

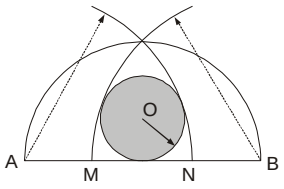
56. En el gráfico : $m\widehat{EO}=120°$, R = 6. Calcular el área de la región sombreada, si G, F y E son puntos de tangencia.



a) $\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{5}}{3}$ b) $\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}$ c) $\pi+\sqrt{3}$

d) $4\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $2\pi+\frac{\sqrt{6}}{4}$

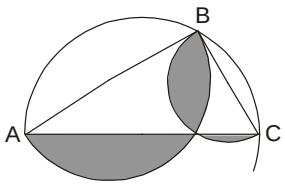
57. Del gráfico : AM = MN = NB, AB = 2R. Calcular el área de la región sombreada.



a) $\frac{9\pi}{24}R^2$ b) $\frac{81}{36}\pi R^2$ c) $\frac{49}{576}\pi R^2$

d) $\frac{6\pi}{1301}R^2$ e) $\frac{74\pi}{25}R^2$

58. Calcular el área de la región sombreada, si: AC = 20m; AB = 16m, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$, son diámetros de las circunferencias.

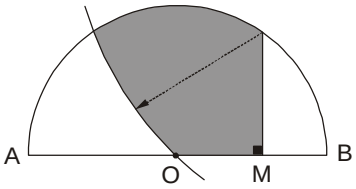


a) $(50\pi - 96)m^2$ b) $(48\pi - 76)$

c) $(96\pi - 50)$ d) $(50\pi - 48)$

e) $(48\pi - 69)$

59. En el gráfico, OM = MB y OA = OB = R. Calcular el área de la región sombreada.

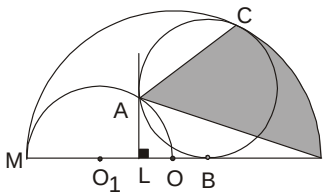


a) $\frac{R^2}{24}(8\pi - 3\sqrt{3})$ b) $\frac{R^2}{12}(8\pi - 5\sqrt{3})$

c) $\frac{R^2}{16}(7\pi - 3\sqrt{3})$ d) $R^2(3\sqrt{3}\pi - 1)$

e) $\frac{R^2}{6}(8\pi - 5\sqrt{3})$

60. Del gráfico, calcular el área de la región sombreada, si: ML = 9 y LO = 3. Además: "O_1" y "O" son centros.



a) $20\pi u^2$ b) 25π c) 18π

d) 28π e) 24π

Claves

21.	d
22.	b
23.	b
24.	a
25.	b
26.	e
27.	c
28.	a
29.	b
30.	a
31.	a
32.	b
33.	e
34.	c
35.	c
36.	c
37.	e
38.	c
39.	b
40.	b

41.	d
42.	d
43.	d
44.	e
45.	d
46.	c
47.	e
48.	c
49.	e
50.	d
51.	c
52.	a
53.	b
54.	d
55.	d
56.	b
57.	c
58.	a
59.	a
60.	c

Capítulo

16

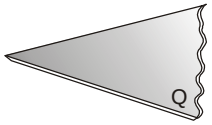
GEOMETRÍA DEL ESPACIO PERPENDICULAR - DIEDRO - TRIEDRO

GEOMETRÍA DEL ESPACIO - DIEDROS

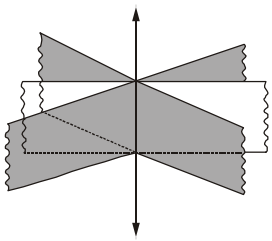
PLANO :

.....

.....

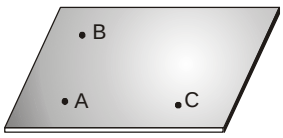


AXIOMA :

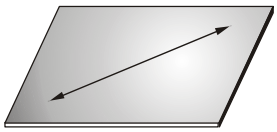


DETERMINACIÓN DEL PLANO :

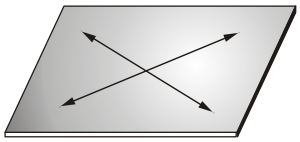
I.



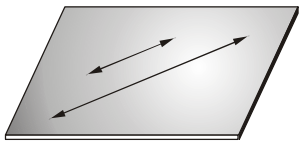
II.



III.



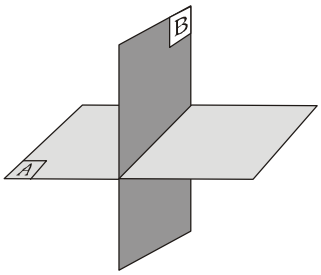
IV.



POSICIONES RELATIVAS DE DOS FIGURAS EN EL ESPACIO

I. ***DOS PLANOS***

I.a.

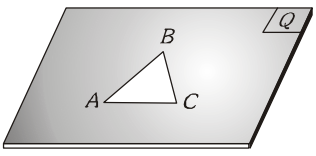


A y B secantes

I.b.

A y C paralelos

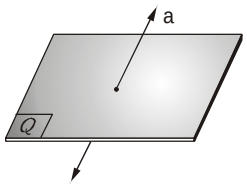
I.c.



Q y ABC son coincidentes

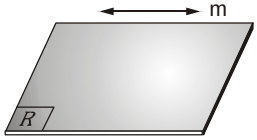
II. ***UN PLANO Y UNA RECTA***

a)



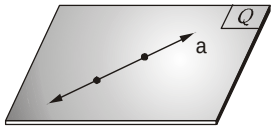
Q y $\overleftrightarrow{a}$ son secantes

b)



$\overleftrightarrow{m}$ y R son paralelos

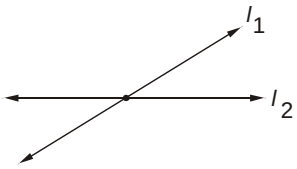
c)



$\overleftrightarrow{a}$ está contenida en Q

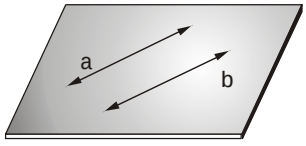
III. ***DOS RECTAS***

a)



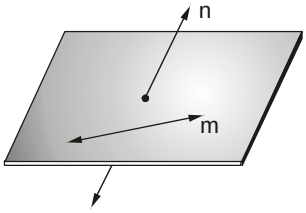
l_1 y l_2 son rectas secantes

b)



$\overleftrightarrow{a}$ y $\overleftrightarrow{b}$ son rectas paralelas

c)



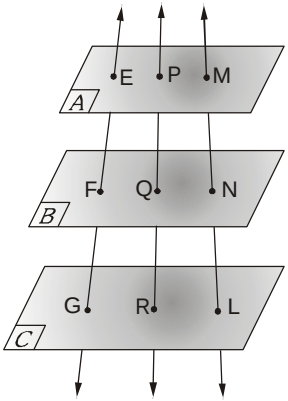
$\overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{n}$ son rectas alabeadas

TEOREMA DE THALES

.....

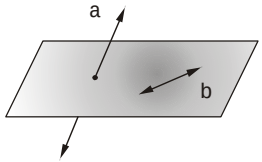
.....

Si : A // B // C.



→ $\frac{EF}{FG} = \frac{PQ}{QR} = \frac{MN}{NL} = k$

ÁNGULO ENTRE RECTAS ALABEADAS



.....

.....

.....

.....

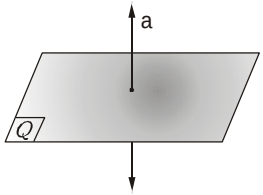
RECTA PERPENDICULAR A UN PLANO

Definición :

.....

.....

.....

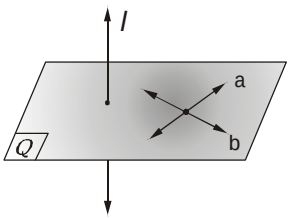


Condición :

.....

.....

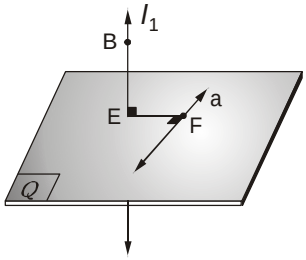
.....



Si : $\vec{\ell} \perp \vec{a}$
y $\vec{\ell} \perp \vec{b}$
$\Rightarrow \vec{\ell} \perp Q$

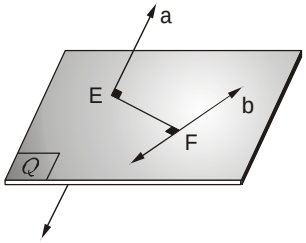
TEOREMA DE LAS TRES PERPENDICULARES

.....
.....
.....



Si : $l_1 \perp Q$
y $\overline{EF} \perp \vec{a}$
$\Rightarrow \overline{BF} \perp \vec{a}$

DISTANCIA ENTRE RECTAS ALABEADAS

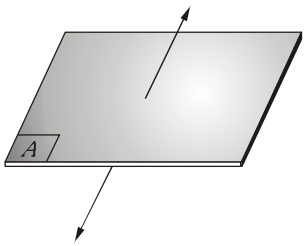


$\vec{a}$ y $\vec{b}$ alabeados

EF : es la menor distancia entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$

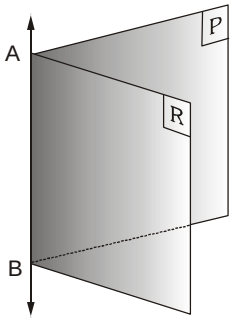
ÁNGULO ENTRE RECTA Y PLANO

.....
.....
.....



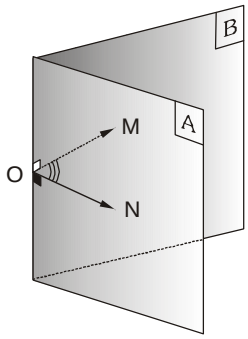
ÁNGULO DIEDRO

Definición :
.....
.....
.....



Caras : P y R
Arista : $\overleftrightarrow{AB}$
Notación : Diedro $\overleftrightarrow{AB}$
ó P - $\overleftrightarrow{AB}$ - R

* Se denomina ángulo plano o ángulo rectilíneo de ángulo diedro, al ángulo formado por dos rayos perpendiculares a la arista en uno de sus puntos y situados uno en cada cara del diedro.

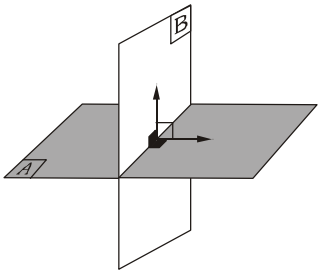


$\measuredangle$ MON : ángulo rectilíneo

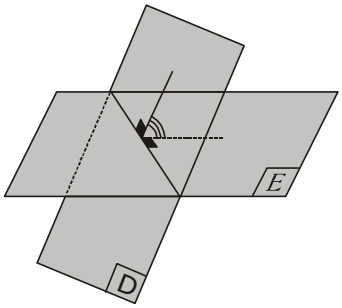
* Comúnmente, a la medida del ángulo MON se le denomina ángulo diedro o ángulo entre plano y plano.

PLANOS PERPENDICULARES

Definición :
.....
.....
.....



A y B son perpendiculares

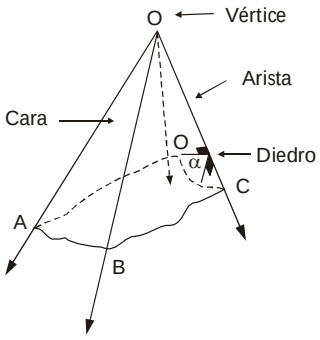


D y E son oblicuos

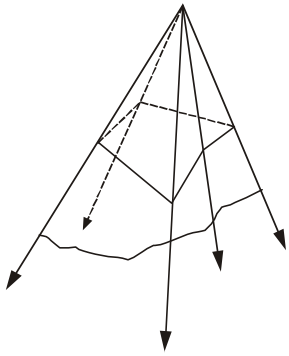
ÁNGULO POLIEDRO

Es aquella figura geométrica determinada al trazar desde un mismo punto tres o más rayos no alineados ni coplanares. Dicho punto vendrá a ser el vértice, los rayos sus aristas y los ángulos planos que determinan sus caras.
Se denomina ángulo triedro, ángulo tetraedro, ángulo pentaedro, etc. Según el número de cara sea: 3, 4, 5, etc.; respectivamente.

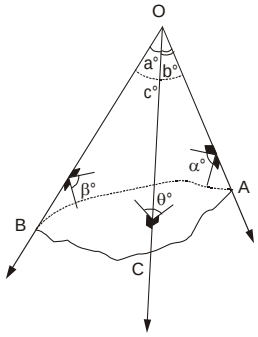
ÁNGULO POLIEDRO CONVEXO



ÁNGULO POLIEDRO NO CONVEXO



ÁNGULO TRIEDRO



ELEMENTOS :

I. Vértice : O
II. Aristas : $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$
III. Caras: $\sphericalangle$ BOC , $\sphericalangle$ AOC y $\sphericalangle$ AOB
IV. Diedros : $\alpha°$, $\beta°$ y $\theta°$
(Medidas)

PROPIEDADES :

I. Suma de Medidas de las Caras

$$0° < a° + b° + c° < 360°$$

Es válido para cualquier ángulo poliedro.

II. Desigualdad entre las Caras

$$b° - c° < a° < b° + c°$$
$$a° - c° < b° < a° + c°$$
$$a° - b° < c° < a° + b°$$

III. Suma de las Medidas de los Ángulos Diedros.

$$180° < \alpha° + \beta° + \theta° < 540°$$

CLASIFICACIÓN :

I. Triedro Escaleno

$a° \neq b° \neq c°$; $\alpha° \neq \beta° \neq c°$

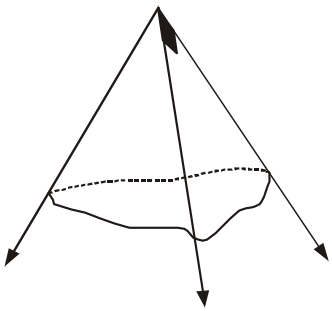
II. Triedro Isósceles

$a° \neq b° \neq c°$; $\alpha° \neq \beta° \neq \theta°$

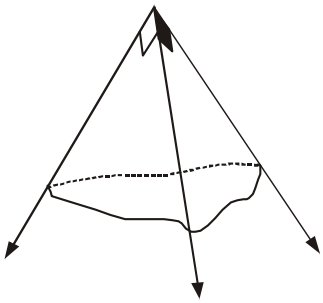
III. Triedro Isoedro o Equilátero

$a° = b° = c°$; $\alpha° = \beta° = \theta°$

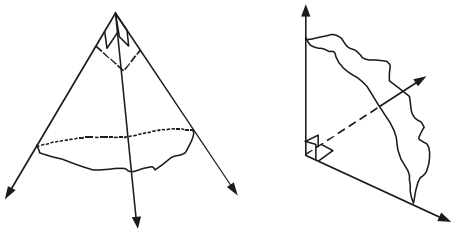
IV. Triedro Unirectángulo



V. Triedro Birectángulo

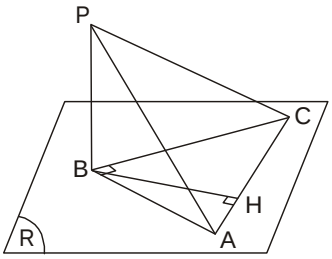


VI. Triedro Trirectángulo

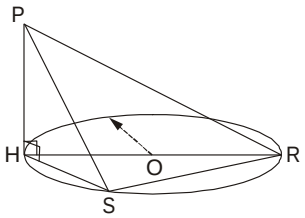


Test de aprendizaje preliminar

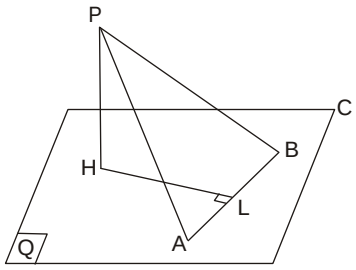
01. En el gráfico, $\overline{PB}$ es perpendicular al plano R, AH = 2u, HC = 8u, PB = 3u. Calcular el área de la región APC.



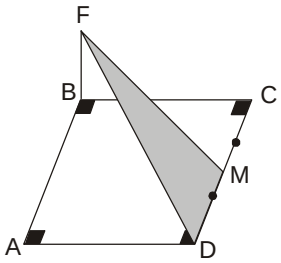
02. En el gráfico; $m\sphericalangle RHS = 30°$; OH = 5, $PH = 5\sqrt{3}$. Calcular el área de la región PSR.



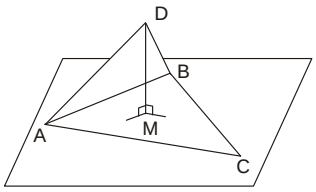
03. En el gráfico, $\overline{PH}$ es perpendicular al plano Q, PH = 12, AP = BP = 13 y AB = 8. Calcular HL.



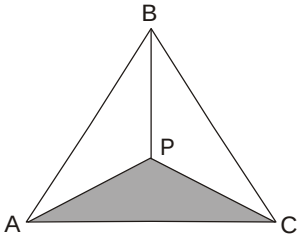
04. En el gráfico, $\overline{BF}$ es perpendicular al plano del cuadrado ABCD.
Si : AB = BF = BC = a y "M" es punto medio de $\overline{CD}$, hallar el área de la región sombreada.



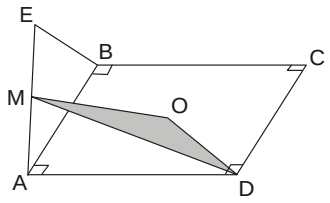
05. En el gráfico, ABC es un triángulo equilátero de ortocentro M, $\overline{MD}$ perpendicular al plano del triángulo. Calcular la medida del diediro formado por ABC y ABD. (MD = $\sqrt{27}$, AC = 6).



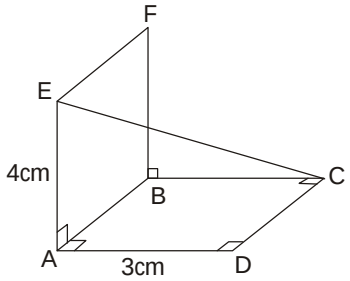
06. En la figura, hay un triedro cuyas caras son mutuamente ortogonales y la longitud de sus aristas es : PA = PB = PC = 6m.
Hallar el área de la región triangular ABC.



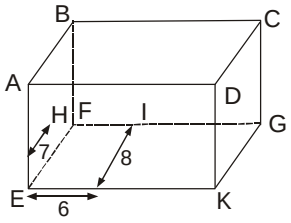
07. En la figura ABCD es un cuadrado y ABE es un triángulo equilátero, situados en planos perpendiculares. Si : AB = 2cm, AM = ME y "O" es centro del cuadrado. Hallar el área del triángulo MOD.



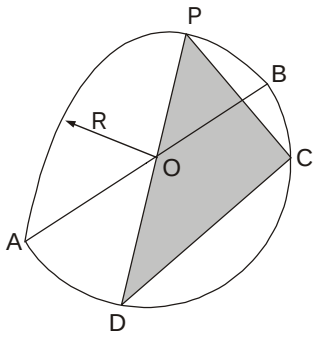
08. Hallar la menor distancia entre $\overline{EC}$ y $\overline{AB}$ en la figura mostrada.



09. La figura representa una caja; en el punto H sobre la cara ABFE se encuentra una hormiga, y en el punto I sobre la cara EFGK se encuentra su comida. Hallar la mínima distancia recorrida por la hormiga para llegar a I.



10. Calcular la medida del diedro formado por los semicírculos de radio "R". Si el área de la región PCD es $\frac{R^2}{2}$, además : $\overline{CD} // \overline{AB}$, $m\widehat{CD} = 90^o$. (P punto máximo del semicírculo).



Practiquemos :

11. Las proyecciones de un segmento de recta $\overline{AB}$ sobre un plano y sobre una recta perpendicular al plano miden, respectivamente 12cm, 5cm.
¿Cuánto mide el segmento $\overline{AB}$?

12. La distancia de un punto P a una recta contenida en un plano es de 13 cm. La distancia de la recta al pie de la perpendicular que va de P al plano es de 12cm. ¿Cuál es la distancia del punto al plano?

13. Un segmento de recta de 26 cm, une el punto A del plano "x" con el punto B del plano y, x e y son planos paralelos la proyección de AB sobre x o y mide 24m. La distancia entre x e y es:

14. Se han determinado como máximo 45 planos utilizando "n" rectas secantes. Calcular "n".

15. Tres planos paralelos determinan sobre una recta secante L_1, los segmentos $\overline{AE}$ y $\overline{EB}$ y sobre otra L_2, secante, los segmentos $\overline{CF}$ y $\overline{FD}$. Si : AB = 8m, CD = 12m y FD-EB = 1m. Calcular CF.

16. El radio de la circunferencia circunscrita a un triángulo regular ABC mide $2\sqrt{3}$ dm. Por "B" se levanta $\overline{BF}$ perpendicular al plano del triángulo. Si $\overline{BF}$ mide 2dm, calcular el área de la región triangular AFC.

17. Dado un triángulo rectángulo AOB isósceles, siendo $AO = OB = \sqrt{6}$ m, en el vértice O se eleva una perpendicular al plano AOB y se toma un punto M sobre esta perpendicular, uniendo M con los vértices A y B. Calcular el valor de $\overline{OM}$ para que el diedro $\overline{AB}$ mida 60°.

18. En un triángulo ABC, recto en B, los lados miden AB = 6 y BC = 8. Por el vértice B, se traza $\overline{BF}$ perpendicular al plano ABC tal que BF = 4,8. Hallar la medida del ángulo diedro que forman los planos ABC y AFC.

19. Dado un triángulo rectángulo AOB, siendo :
OA = OB = 2a; en O, se levanta una perpendicular al plano AOB, sobre la que se toma M, $OM = a\sqrt{6}$ y luego se une M con los puntos A y B.
Calcular la medida del diedro AB.

20. Graficar al triángulo ABC y levante $\overline{BQ}$ perpendicular al plano ABC. Si :
BQ = 4,8 dm, AB = 6 dm, BC = 8 dm y AC = 10 dm.
Calcular el valor del ángulo diedro $\overline{AC}$.

Problemas propuestos

21. Dos puntos A y B, situados a uno y otro lado de un plano X, distan de dicho plano, 6cm y 9cm, respectivamente. Si la proyección del segmento $\overline{AB}$ sobre el plano es 30 cm. Hallar la distancia entre los puntos A y B.

a) $15\sqrt{5}$ cm b)15 c) $12\sqrt{3}$
d) $12\sqrt{5}$ e) 12

22. Sean $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$ dos rectas alabeadas que forman un ángulo de medida igual a 60°. En $\overleftrightarrow{L_1}$ se marcan los puntos "A" y "B", en $\overleftrightarrow{L_2}$ se marcan los puntos "P" y "Q" de modo que: $\overline{AP}$ sea la mínima distancia entre ellas y AB = PQ = 2(PA).
Calcular la relación de QB y AP.

a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{3}$ c) $\sqrt{4}$
d) $\sqrt{5}$ e) $\sqrt{6}$

23. Los planos que contienen a los rectángulos ABCD y BCEF forman un ángulo diedro recto, tal que :
BC = 8 y BF = 6, entonces, la longitud del segmento que une los puntos medios de $\overline{FD}$ y $\overline{AB}$ es:

a) 4 b) 4,5 c) 5
d) 5,5 e) 6

24. Sea ABC un triángulo equilátero se levanta $\overline{CF}$ perpendicular al plano del triángulo ABC de modo que $\overline{CF} \cong \overline{BA}$. Calcular la medida del ángulo diedro que forman los planos ABC y AFB.

a) 30° b) $\text{ArcSen}\frac{2\sqrt{7}}{7}$

c) $\text{ArcSen}\frac{\sqrt{7}}{7}$ d) $\text{ArcSen}\frac{3\sqrt{7}}{7}$

e) $\text{ArcSen}\frac{\sqrt{6}}{3}$

25. Uno de los catetos de un triángulo isósceles está contenida en el plano "P" y el otro forma con dicho plano un ángulo de 45°. Calcular el ángulo que forma su hipotenusa con el plano "P".

a) 45° b) 30° c) 60°

d) $\text{ArcSen}\frac{1}{5}$ e) $\text{ArcCos}\frac{\sqrt{2}}{4}$

26. La recta l de intersección de dos planos x e y, perpendiculares entre sí, es paralela a una recta R del plano "x" y a una recta S del plano y si la distancia entre l y R es de 16 cm, y la distancia entre l y S es de 12 cm. ¿Cuál es la distancia entre R y S?

a) 14 cm b) 25 c) $4\sqrt{28}$

d) $10\sqrt{3}$ e) 20

27. Calcular el máximo valor entero de las caras de un triedro si las otras dos miden 100° y 120°.

a) 100° b) 112° c) 139°
d) 140° e) 141°

28. Calcular el máximo valor de una cara de un triedro equilátero.

a) 100° b) 110° c) 130°
d) 119° e) 141°

29. A-BCD es un triedro trirectángulo de modo que $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD} = 6m$. Si O es la proyección de A sobre el plano BCD, entonces la distancia que hay entre O y la arista $\overline{AB}$ es:

a) 8 m b) $4\sqrt{3}$ c) $6\sqrt{2}$

d) $2\sqrt{2}$ e) $2\sqrt{3}$

30. Calcular el máximo número de planos que determinan 8 rectas paralelas y 6 puntos en el espacio.

a) 48 b) 72 c) 84
d) 96 e) 106

31. Si un plano es paralelo a una recta:

a) Toda perpendicular a la recta será paralela al plano.
b) Toda recta paralela al plano será paralela a la recta dada.
c) Todo plano perpendicular al plano dado será paralelo a la recta dada.
d) Toda recta que es perpendicular al plano tendrá que ser perpendicular a la recta.
e) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

32. Si una recta es perpendicular a tres rectas dadas :

a) Las tres rectas dadas tienen que ser paralelas.
b) Las tres rectas dadas tienen que estar en un mismo plano que contenga la perpendicular.
c) Por las tres rectas pueden pasar tres planos paralelos entre sí.
d) Por las tres rectas dadas no pueden pasar planos paralelos entre sí.
e) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

33. Cuando dos planos son perpendiculares :

a) Todo plano perpendicular a uno de ellos lo es también al otro.
b) Toda recta perpendicular a la intersección de ambos debe estar contenida en uno de ellos.
c) Todas las rectas de uno de ellos son perpendiculares al otro.
d) No siempre se cortan.
e) Todo plano perpendicular a su interacción es perpendicular a ambos.

34. Se tienen los segmentos alabeados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ ortogonales: AB = 4 y CD = 6. Hallar la longitud del segmento que une los puntos medios de AC y BD.

a) 3 b) 4 c) $\sqrt{13}$

d) $\sqrt{11}$ e) $\sqrt{15}$

35. Dado un triángulo rectángulo isósceles AOB, siendo OA = OB = 7a, en O se levanta una perpendicular al plano: AOB, sobre lo que se toma: $\overline{OM} = \frac{7a\sqrt{6}}{6}$ y, se une el punto M con los vértices A y B. Se pide calcular el valor o medida del diedro $\overline{AB}$.

a) 15° b) 18° c) 30°
d) 40° e) 45°

36. El área de la proyección de un cuadrado sobre un plano que al pasar por su diagonal forma un ángulo de 60° con el plano del cuadrado, es 18,2 centiáreas. El área del cuadrado, en centiáreas es:

a) 36,4 b) 21,3 c) 18,2
d) 9,1 e) 31,6

37. El punto A está 8 cm encima de un plano horizontal y el punto B está 4cm encima del mismo plano. La proyección de $\overline{AB}$ sobre el plano mide 9 cm. Calcular la longitud en cm del menor camino de A a B pasando por un punto del plano.

a) 15 b) 17 c) 14
d) 21 e) 13

38. Un triángulo se encuentra en un plano que forma un ángulo de 45° con otro plano P. Si la proyección del triángulo sobre el plano P tiene $20cm^2$ de área, encontrar en cm^2 el área del triángulo del espacio.

a) $20\sqrt{2}$ b) $18\sqrt{2}$ c) $24\sqrt{2}$
d) 24 e) 30

39. Una hoja de papel de forma rectangular ABCD, tiene como dimensiones: $AB = 8(\sqrt{5}-1)m$, BC = 3m. Por los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, se dobla la hoja de papel de manera que el ángulo diedro formado es de 72°. Hallar la distancia mínima que existe entre la arista del diedro y el segmento que une el centro de sus caras.

a) 2 cm b) 3 c) 4
d) $(\sqrt{5}+1)m$ e) $\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

40. En una circunferencia de diámetro AB = 10 cm, se escoge un punto P sobre dicha circunferencia; si hacemos girar $\alpha°$ la circunferencia sobre su diámetro la nueva ubicación de P es P'. Hallar AP para que el perímetro del triángulo PMP' sea máximo, siendo M la proyección de P sobre $\overline{AB}$.

a) 5 cm b) 10 c) $5\sqrt{2}$
d) $10\sqrt{2}$ e) $5\sqrt{3}$

41. Un triángulo isósceles ABC, donde :
AB = AC = a, está inscrito en un círculo de radio a. En A, se levanta una perpendicular $\overline{AD}$ al plano del triángulo y se une el punto D con los vértices, B y C. Calcular la longitud del segmento $\overline{DB}$ para que el diedro D-BC-A mida 30°.

a) $a\sqrt{\frac{13}{3}}$ b) $a\sqrt{\frac{13}{12}}$ c) $\frac{a}{2}\sqrt{\frac{13}{3}}$
d) $\frac{a}{2}\sqrt{13}$ e) $a\sqrt{13}$

42. Dado un triedro S-ABC, si $\overrightarrow{SC}$ forma con la bisectriz de la cara opuesta un ángulo igual a la mitad de dicha cara, calcular el diedro C, si:
diedro A + diedro B = 120°.

a) 90° b) 45° c) 135°
d) 60° e) 120°

43. Sea "C" un círculo de centro "O" y un cuadrado ABCD que se encuentran contenidos en planos perpendiculares (sea $\overline{AB}$ una cuerda de "C").
Se marca "M" en $\overline{DC}$, de modo que : 3DM = 5MC, AB = 8dm y OA = 5dm.
Calcular la distancia de "M" a $\overline{OB}$.

a) 41/5 dm b) $4\sqrt{3}$ c) 42/5
d) 40/7 e) 40/3

44. Por el circuncentro "O" del triángulo equilátero ABC, se traza $\overline{OP}$ perpendicular al plano del triángulo. Marque "H" ortocentro del triángulo APB y calcular la medida del ángulo entre $\overleftrightarrow{AP}$ y $\overleftrightarrow{HC}$.
(AC = AD).

a) 37° b) 45° c) 60°
d) 53°/2 e) 90º

45. Un triángulo equilátero ABC está en un plano perpendicular a un cuadrado ABDE. El segmento de recta que une el punto medio de lado $\overline{AC}$ con el punto medio del lado $\overline{BD}$ del cuadrado mide 1m.
¿Cuál es la longitud del lado del triángulo o del cuadrado?

a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{3}$ c) 1,5
d) 1 e) 2

46. Dado un triángulo ABC, equilátero se traza $\overline{AE}$, perpendicular al plano del triángulo. Si : AE = BC, calcular la medida del ángulo con que se cruzan $\overleftrightarrow{EB}$ y $\overleftrightarrow{AC}$.

a) 75° b) 90° c) 120°
d) 150° e) $\text{ArcCos}(-\frac{\sqrt{2}}{4})$

47. Dado un triángulo ABC. AB = 15; BC = 8 y AC = 17. Por el incentro "I" se eleva $\overline{ID}$, perpendicular al plano ABC, siendo: $ID = \sqrt{247}$. Calcular la medida del ángulo DAB.

a) 37° b) 53° c) 60°
d) 45° e) 75°

48. Sobre una circunferencia de centro "O" y radio cuya longitud es 10m, se ubican los puntos "A" y "B", tal que: $m\widehat{AB} = 127°$. Por "B" se levanta $\overline{BP}$, perpendicular al plano del círculo, siendo: BP = 24m. Calcular el área de la región triangular AOP.

a) $32\sqrt{10}$ b) $45\sqrt{10}$ c) $38\sqrt{10}$
d) $40\sqrt{10}$ e) $42\sqrt{10}$

49. Dados dos planos no paralelos se toma un segmento $\overline{AD}$ perteneciente a uno de los planos. Si $\overline{BC}$ es la proyección de $\overline{AD}$ sobre el otro plano, hallar la distancia $\overline{AB}$, sabiendo que: $\frac{BC}{6} = \frac{DC}{3} = \frac{AB}{2}$ y el área del cuadrilátero ABCD es de $60m^2$.

a) 1 m b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

50. Se tiene un triángulo rectángulo ABC, recto en B, cuyo cateto AB = 3m. Se traza la mediana $\overline{BM}$; luego, por B se levanta un segmento $\overline{BH}$ perpendicular al plano del triángulo ABC. Si el área de BHM es $5\sqrt{5}\ m^2$ y el área de su proyección sobre el plano determinado por BHC es de $10m^2$, hallar la medida de la hipotenusa AC.

a) $3\sqrt{3}$ m b) $4\sqrt{3}$ c) $5\sqrt{5}$
d) $2\sqrt{5}$ e) $3\sqrt{5}$

51. Dados los planos secantes P y Q, en P está contenido el triángulo ABC y en Q su proyección, el triángulo $A_1B_1C_1$. Si : $\overline{BC} \cong \overline{B_1C_1}$, $m\sphericalangle ACB = 90°$, $m\sphericalangle BAC = 30°$ y $m\sphericalangle A_1B_1C_1 = 45°$, calcular el coseno del ángulo diedro formado por los planos secantes P y Q.

a) $\sqrt{3}/2$ b) $\sqrt{2}/2$ c) $\sqrt{3}/3$
d) $\sqrt{6}/4$ e) 1/2

52. Las caras de un ángulo diedro son cortadas en los puntos M y N por una recta; siendo A la proyección ortogonal de estos puntos sobre la arista, la mitad del ángulo diedro es igual a la semidiferencia de los ángulos $A\hat{N}M$, $A\hat{M}N$; y si estos últimos están en la relación de 3 a 1. ¿Cuál es el valor del ángulo diedro?

a) 30° b) 40° c) 50°
d) 60° e) 70°

53. En el plano P, se tiene el triángulo ABC, cuyo ángulo A mide 60°. Se tiene un punto S fuera del plano P. Si las distancias, de S al punto A es igual a 25cm, de S al lado $\overline{AC}$ igual a 20cm, y de S al lado $\overline{AB}$ igual a 7cm. Hallar la distancia de S al plano P.

a) $\sqrt{37}$ cm b) $\sqrt{39}$ c) $\sqrt{38}$
d) 6 e) $\sqrt{31}$

54. En una mesa, se coloca perpendicularmente una lámina rectangular apoyada sobre su base. Si la altura y la base de la lámina miden "a" cm y "b" cm, respectivamente, ¿qué relación debe existir entre estas longitudes de tal manera que si la lámina empieza a girar sobre su base, la proyección sobre la mesa en algún momento sea un cuadrado?

a) $a<b$ b) $a = b$ c) $a>b$
d) $a = \sqrt{2}b$ e) $b = \sqrt{2}a$

55. Los vectores $\overleftrightarrow{OG}$, $\overleftrightarrow{OC}$ y $\overleftrightarrow{OH}$ son mutuamente perpendiculares y son de igual longitud ($|\overleftrightarrow{OG}| = |\overleftrightarrow{OC}| = |\overleftrightarrow{OH}| = a$). Sea P el baricentro del ΔCGH. Hallar la suma de las distancias trazadas desde P a los tres planos formados por los tres tomados dos a dos.

a) 2a b) 3a c) $\frac{2}{3}a$
d) a e) $\frac{3}{2}a$

56. Se tiene un cuadrado ABCD de lado igual a $\sqrt{2}$ cm. Un semicírculo de diámetro OC es perpendicular al plano del cuadrado y se traza la tangente $\overline{AP}$. Hallar el área del triángulo APB siendo "O" centro del cuadrado.

a) $\sqrt{5}\ cm^2$ b) $2\sqrt{5}$ c) $\frac{\sqrt{5}}{2}$
d) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ e) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

57. Por el vértice "A" de un triángulo ABC, se levanta la perpendicular $\overline{AM}$ al plano del triángulo. Se trazan las perpendiculares $\overline{AP}$ y $\overline{AQ}$ a $\overline{MB}$ y $\overline{MC}$ respectivamente. Si : MQ = 5cm; PB = 6cm; MP = 4cm y $m\sphericalangle BMC = 30°$, hallar el área de la región triangular BMC.

a) $10\ cm^2$ b) 15 c) 18
d) 20 e) 30

58. Un triángulo se encuentra en un plano que forma un ángulo de 45° con otro plano "P". Si la proyección del triángulo sobre "P" tiene $20cm^2$ de área, hallar el área del triángulo.

a) $10\ cm^2$ b) $10\sqrt{2}$ c) 20
d) $20\sqrt{2}$ e) $30\sqrt{2}$

59. Por el vértice "B" de un cuadrado ABCD, se traza una perpendicular $\overline{BP}$ al plano del cuadrado, "M" es punto medio de $\overline{AD}$; si la distancia de "P" a la recta que contiene al vértice "C" y "M" es $4\sqrt{6}$ u y la distancia de "P" al plano del cuadrado es 4u, entonces el lado del cuadrado es:

a) 8 b) 9 c) 10
d) 12 e) 15

60. Se tiene un triángulo rectángulo ABC, recto en "B", AB = 15u y BC = 20u, por un punto "P" exterior al plano ABC, se construyen diedros congruentes AB, BC y AC. Si la distancia de "P" al plano mide 12u, hallar la distancia de "P" al lado AC.

a) 13 u b) 15 c) 14
d) 16 e) 18

Claves

21.	a
22.	d
23.	c
24.	b
25.	b
26.	e
27.	c
28.	d
29.	e
30.	d
31.	e
32.	c
33.	e
34.	c
35.	c
36.	a
37.	a
38.	a
39.	c
40.	c

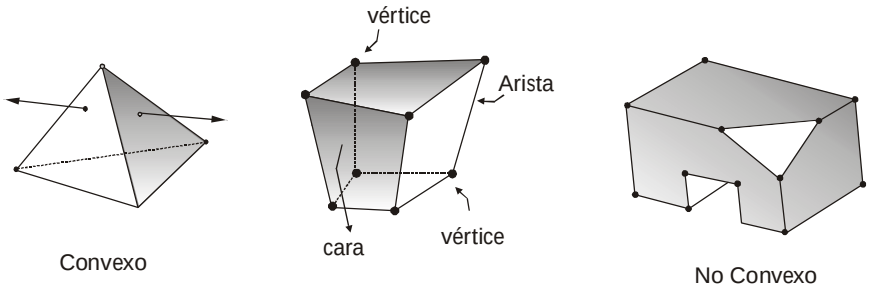
41.	b
42.	d
43.	a
44.	e
45.	d
46.	e
47.	b
48.	d
49.	d
50.	e
51.	c
52.	d
53.	a
54.	d
55.	c
56.	e
57.	b
58.	d
59.	a
60.	a

Capítulo

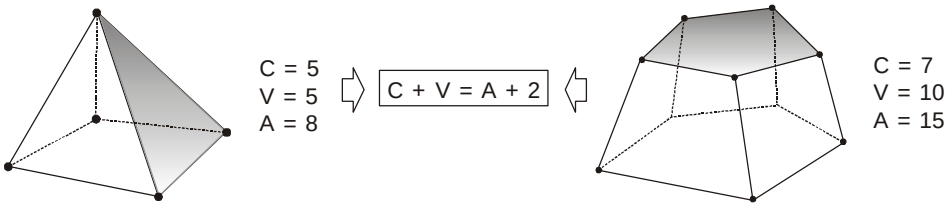
17

POLIEDROS
POLIEDROS REGULARES

POLIEDROS



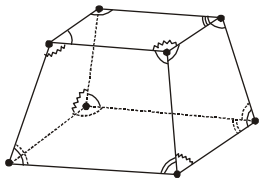
TEOREMA DE EULER



→ 5 + 5 = 8 + 2

→ 7 + 10 = 15 + 2

TEOREMA



S_{ic} = suma de los ángulos internos de todas las caras.

$S_{ic} = 360º (A - C) = 360º(V - 2)$

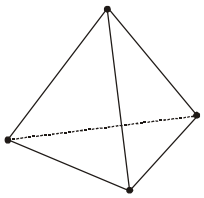
A : número de aristas
V : número de vértices
C : número de lados

* Sean : $n_1, n_2, n_3, n_4, ...$
Los números de lados de las caras del sólido.

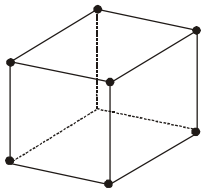
$$\Rightarrow \text{Aristas} = \frac{n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + ...}{2}$$

POLIEDROS REGULARES

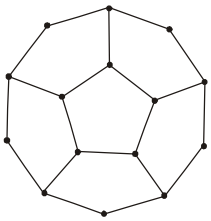
Sólo existen cinco poliedros regulares.



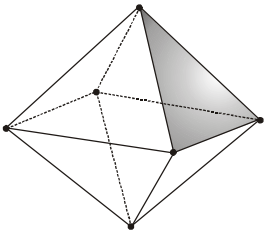
Tetraedro R.



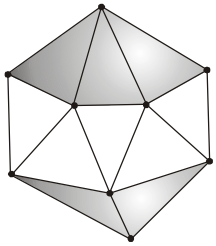
Hexaedro R.



Dodecaedro R



Octaedro R



Icosaedro R

Poliedro Regular	Forma Cara	C	V	A
Tetraedro	△	4	4	6
Hexaedro	□	6	8	12
Octaedro	△	8	6	12
Dodecaedro	⬠	12	20	30
Icosaedro	△	20	12	30

Test de aprendizaje preliminar

01. En todo poliedro convexo, el número de aristas es igual a :

02. La suma de los ángulos internos de todas las caras de un poliedro convexo de "V" vértices; "C" caras y "A" aristas es igual a :

03. ¿Cuántos poliedros regulares existen?

04. En todo poliedro convexo el número de caras es igual a :

05. ¿Cuál de las siguientes expresiones es verdadera? Las caras del dodecaedro regular, son :

06. En un hexaedro regular, el ángulo que forman las diagonales de una cara es :

07. Un octaedro regular se llama así, porque tiene:

08. ¿Cuál es el área de la proyección de una cara de un tetraedro regular sobre otra cara cualquiera, si la arista del tetraedro mide $2\sqrt{3}$ m?

09. En este orden : número de caras, número de vértices, número de aristas y número de lados de cada cara, se enumeran los datos correspondientes a un tetraedro. ¿Cuál es la enumeración correcta?

10. ¿Cuál de las siguientes enumeraciones correspondientes a un hexaedro regular es la correcta? El primer número corresponde al número de caras, el segundo al número de vértices, y el tercero al número de aristas y el último, al número de lados de cada cara.

Practiquemos :

11. La superficie total de un cubo es igual al cuadrado de la diagonal mayor multiplicado por :

12. Se dan 6 segmentos de recta de 10 cm de longitud cada uno. ¿Cuál es el mayor número de triángulos equiláteros de 10 cm de lado que pueden formarse a la vez con los segmentos de recta dadas?

13. La suma de las caras del ángulo poliedro que se forma en cada vértices en un icosaedro regular es igual a :

14. El ángulo formado por dos diagonales cualesquiera de un octaedro regular vale :

15. Encontrar el área de la sección hecha en un tetraedro regular de 10 cm de arista, por un plano de simetría que pasa por una de las aristas.

16. En un cubo de un metro de arista, la distancia del centro de una cara a cualquiera de los vértices de la cara opuesta mide :

17. El número de caras, el número de vértices, el número de aristas y el número de lados de cada cara de un octaedro regular, son respectivamente :

18. Si se corta un octaedro regular en dos poliedros, mediante un plano paralelo a una de sus caras, se obtiene como sección, un polígono regular de :

19. Si partiendo de un cierto vértice de un cubo se trazan las diagonales de dos caras vecinas, ¿cuánto medirá el ángulo que así se forma?

20. Calcular el área total de un hexaedro regular, sabiendo que la distancia de uno de los vértices al centro de una cara opuesta es de 2 m.

Problemas propuestos

21. ¿Cuántos poliedros cuyas caras son triángulos equiláteros existen?

a) 2 b) 3 c) 4
d) 5 e) 6

22. Si la arista de un icosaedro regular mide $\sqrt[4]{3}$ m, calcular el área de su superficie.

a) 15 m^2 b) 9 c) 13
d) 6 e) $6\sqrt{3}$

23. Las aristas de un cubo miden 15 cm cada una. Si una mosca puede desplazarse sólo sobre las aristas y parte de uno de los vértices, el máximo recorrido que puede hacer para volver a su punto de partida, sin pasar dos veces por la misma arista es:

a) 1,80 m b) 0,60 c) 0,75
d) 0,90 e) 1,20

24. Hallar el área total de un tetraedro regular, siendo la suma de las longitudes de sus aristas 36 cm.

a) 36 cm^2 b) $6\sqrt{3}$ c) 24
d) $36\sqrt{3}$ e) $24\sqrt{3}$

25. Se tiene un poliedro convexo formado por 10 regiones cuadrangulares. Calcular el número de aristas de dicho poliedro.

a) 12 b) 14 c) 16
d) 18 e) 20

26. Calcular el número de aristas de aquel poliedro, cuyo número de caras y el número de aristas están en la relación de 2 a 3. Además, la suma de las medidas de los ángulos internos de todas sus caras es igual a 3600º.

a) 20 b) 24 c) 28
d) 30 e) 32

27. ¿Cuántas diagonales tiene aquel poliedro convexo que está limitado por 6 regiones cuadrangulares y 8 regiones triangulares.

a) 38 b) 36 c) 34
d) 32 e) 30

28. En un tetraedro regular, si el segmento que une los puntos medios de dos aristas opuestas es $\overline{MN}$. El lado del tetraedro, será:

a) $MN\sqrt{3}$ b) $MN\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $MN\sqrt{2}$
d) $MN\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\frac{2}{3}MN$

29. Considerando como vértices los puntos donde se cortan las dos diagonales de cada cara de un hexaedro regular, se obtiene un octaedro, también regular.
Si las aristas del hexaedro mide "a" cm, las caras del octaedro medirán :

a) $\frac{a^2}{8}\sqrt{3}\,cm^2$ b) $\frac{a^2}{4}$ c) $\frac{a^2}{8}$
d) $\frac{3a^2}{8}$ e) $\frac{3a^2}{4}$

30. En un cubo, las caras opuestas son ABCD y EFGH, siendo las aristas que las conectan $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$ y $\overline{DH}$. El ángulo que forma $\overline{BE}$ con $\overline{AH}$ mide :

a) 30º b) 45º c) 60º
d) 75º e) 90º

31. Dado el hexaedro regular ABCD-EFGH de aristas laterales $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$ y $\overline{DH}$. Los puntos M y N son puntos medios de las aristas $\overline{EH}$ y $\overline{HG}$. Hallar la medida del ángulo diedro entre el plano MNB y el plano EFGH.

a) $ArcTan(\frac{\sqrt{2}}{3})$ b) $ArcTan(\frac{2\sqrt{2}}{3})$
c) $ArcTan(\frac{3\sqrt{2}}{2})$ d) $ArcCos(\frac{3}{\sqrt{15}})$
e) $ArcCos(\frac{2}{\sqrt{17}})$

32. En un octaedro regular, la distancia de un vértice al baricentro de la cara opuesta a dicho vértice mide L unidades(u).
Calcular el área de la superficie total del octaedro.

a) $3L^2\sqrt{3}\,u^2$ b) $4L^2\sqrt{3}$
c) $2L^2\sqrt{3}$ d) $\frac{4L^2\sqrt{3}}{3}$
e) $\frac{5L^2\sqrt{3}}{2}$

33. Dado un tetraedro regular de arista "a", calcular el área de la sección determinada por un plano de simetría que pasa por una de las aristas.

a) $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{a^2\sqrt{2}}{3}$ c) $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$

d) $\frac{a^2\sqrt{2}}{5}$ e) $\frac{a^2\sqrt{2}}{6}$

34. En un tetraedro OABC, se cumple que los ángulos COB = 60º, AOB = 45º, AOC = 45º. Entonces, el valor del ángulo diedro correspondiente a la arista OA vale:

a) 45º b) 60º c) 75º
d) 90º e) 120º

35. Un poliedro que tiene 12 vértices y 21 aristas está formado por "2p" triángulos, "c" cuadriláteros y "p" pentágonos, todos convexos. Entonces, "p" y "c" son, respectivamente :

a) 1 y 8 b) 3 y 2 c) 2 y 5
d) 3 y 4 e) 4 y 1

36. Un paralelepípedo rectángulo cuyas dimensiones son a, b, c (siendo "c" la altura). Sea : a = c = 4 cm. Suponiendo que el área total es igual a 4 veces el área de uno de los rectángulos diagonales "verticales", entonces, dicha área total, en cm^2, es :

a) 76 b) 78 c) 80
d) 82 e) 84

37. En un tetraedro PQRS, el ángulo diedro correspondiente a la arista PQ es recto, y los ángulos QPR y QPS miden 45º. Entonces, el ángulo RPS, mide:

a) 30º b) 45º c) 60º
d) 72º e) 75º

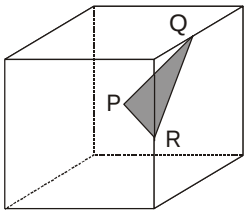
38. Se tiene un hexágono regular ABCDEF de lado "a" en un plano "P", CDL es un triángulo equilátero perpendicular a dicho plano. El área del triángulo ALF equivale al área total de un tetraedro regular de arista:

a) $\frac{a^2\sqrt{15}}{2}$ b) $\frac{a^2\sqrt{15}}{4}$

c) $\sqrt{\frac{a^2\sqrt{15}}{6}}$ d) $\sqrt{\frac{a^2\sqrt{5}}{12}}$

e) $\sqrt{\frac{a^2\sqrt{15}}{12}}$

39. Se tiene un cubo de arista "a", hallar el área del triángulo PQR, si P es centro, Q y R son puntos medios.



a) $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ b) $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$ c) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

d) $\frac{a^2\sqrt{3}}{6}$ e) $\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$

40. En un triedro trirectángulo O-ABC se sabe que :
OA = 1 cm; OB = 2 cm y OC = 3 cm.
Hallar la distancia de "O" a la sección plana ABC.

a) 5/7 b) 6/7 c) 1
d) 4/7 e) 5/8

41. Se tiene un tetraedro regular de arista "a". Hallar el volumen del tetraedro regular que se forma al unir los baricentros de las caras.

a) $\frac{a^3\sqrt{2}}{27}$ b) $\frac{a^3\sqrt{2}}{81}$ c) $\frac{a^3\sqrt{2}}{162}$

d) $\frac{a^3\sqrt{2}}{216}$ e) $\frac{a^3\sqrt{2}}{324}$

42. En un tetraedro ABCD, se tiene que :
AC = AD y BC = BD. Hallar la medida del ángulo que forman las aristas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

a) 45º b) 60º c) 90º
d) 30º e) 120º

43. Se tiene un triedro trirectángulo O-ABC, se traza $\overline{OH}$ perpendicular a la sección plana ABC. Hallar el área de la cara BOC, si las áreas de las caras ABC y BHC miden 20 y 10 cm^2, respectivamente.

a) $10\sqrt{2}\,cm^2$ b) 5 c) $5\sqrt{2}$

d) $15\sqrt{2}$ e) 10

44. La longitud del segmento que une los puntos medios de dos aristas opuestas de un tetraedro regular es de $\sqrt{2}$ cm. ¿Cuál es la longitud de la arista?

a) 1 cm b) 2 c) 3

d) $\sqrt{2}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

45. Se tiene un cubo ABCD-EFGH y un punto interior "P". Si :

$(PA)^2 + (PC)^2 - (PB)^2 = a^2$, hallar PD.

a) a b) 2a c) $\frac{a}{2}$
d) $\frac{3a}{2}$ e) 3a

46. En el triedro isósceles :
O-ABC : bº = cº = 60º, y aº = 90º.
Sobre $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$ se ubican los puntos M, N y L, respectivamente, tal que :
$ON + OL = 8\sqrt{2}$ y m∢LMN = 90º. Calcular la longitud de $\overline{OM}$.

a) $8\sqrt{2}$ b) 8 cm c) 16 cm
d) $4\sqrt{2}$ e) 4 cm

47. "O" es el centro de un hexaedro regular ABCD-EFGH; M y N son los puntos medios de $\overline{CD}$ y $\overline{CG}$, respectivamente. Si el área de la región triangular OMN es S, calcular el área total del hexaedro regular.

a) $8S\sqrt{3}$ b) $16S\sqrt{3}$ c) $24S\sqrt{3}$
d) $12S\sqrt{2}$ e) $9S\sqrt{6}$

48. En el octaedro regular E-ABCD-F, M es punto medio de $\overline{EC}$. Calcular el ángulo formado por $\overleftrightarrow{AM}$ y $\overleftrightarrow{DF}$.

a) $\text{ArcCos}\frac{\sqrt{5}}{5}$ b) $\text{ArcCos}\frac{\sqrt{10}}{5}$
c) $\text{ArcCos}\frac{\sqrt{5}}{10}$ d) $\text{ArcCos}\frac{\sqrt{10}}{10}$
e) $\text{ArcCos}\frac{\sqrt{5}}{10}$

49. Dar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

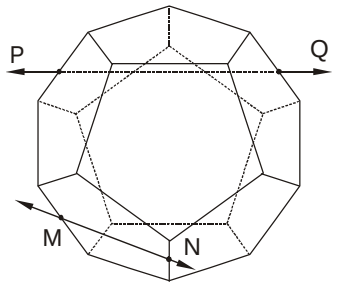
* En los vértices de todo poliedro regular se forman ángulos diedros.
* El icosaedro regular tiene 100 diagonales.
* En un dodecaedro hay 20 vértices.
* Las diagonales de un octaedro regular son perpendiculares.

a) FVFV b) VVVV c) FFFV
d) VFVF e) FFFF

50. Dado el cubo ABCD-EFGH de arista "a", M y N son puntos medios de $\overline{AE}$ y $\overline{CG}$. Siendo "O" el centro de la cara CDHG, hallar la distancia del punto de intersección entre $\overline{OF}$ y el plano que contiene a MBNH, a la cara EFGH.

a) $\frac{2a}{5}$ b) $\frac{3a}{5}$ c) $\frac{a}{4}$
d) $\frac{3a}{8}$ e) $\frac{a}{5}$

51. En el gráfico, se muestra un dodecaedro regular, siendo: P, Q, M y N puntos medios de las aristas respectivas. Calcular la medida del ángulo entre $\overleftrightarrow{PQ}$ y $\overleftrightarrow{MN}$.



a) 18º b) 36º c) 54º
d) 72º e) 45º

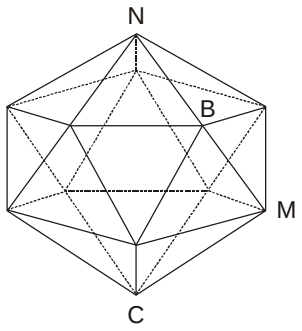
52. En un tetraedro regular ABCD, M y N son puntos medios de $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$, respecti-vamente. Si la distancia entre $\overline{MN}$ y $\overline{AC}$ es $3\sqrt{2}$ u, calcular el área de la superficie del poliedro conjugado del tetraedro inscrito en él.

a) $4\sqrt{3}\,u^2$ b) $2\sqrt{3}$ c) $16\sqrt{3}$
d) $6\sqrt{3}$ e) $5\sqrt{3}$

53. En un octaedro regular P-ABCD-Q, M y N, son centros de las caras PCD y ABQ, respectivamente. Si la distancia entre $\overleftrightarrow{DN}$ y $\overleftrightarrow{MR}$ (R es punto medio de $\overline{PA}$) es : $(\frac{3\sqrt{22}}{11})u$.
Calcular el volumen del octaedro.

a) $9\sqrt{2}\,u^3$ b) $3\sqrt{6}$
c) $7\sqrt{19}$ d) $\sqrt{17}$
e) $5\sqrt{6}$

54. En la figura, se muestra un icosaedro regular. Calcular la medida del ángulo entre $\overleftrightarrow{MN}$ y $\overleftrightarrow{BC}$.



a) 90º b) 60º c) 53º
d) 72º e) 37º

55. En un octaedro regular E-ABCD-F, se traza la sección plana determinada por los puntos medios de las aristas AF y ED y por el punto B. Si la arista del octaedro es de 2 unidades, calcular la distancia de B a la recta de intersección de la sección con la cara ADF.

a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{\frac{111}{33}}$ c) $\frac{2\sqrt{453}}{13}$

d) $\sqrt{\frac{315}{117}}$ e) 1

56. En un tetraedro P-ABC trirectángulo en P :
PA = PB = PC = $3\sqrt{2}$. Calcular la diagonal de cubo inscrito en el tetraedro, donde uno de los ángulos sólidos del cubo es P.

a) 3 b) $\sqrt{6}$ c) 4

d) $2\sqrt{3}$ e) 6

57. Se tiene el hexaedro regular ABCD-EFGH, cuyas aristas mide 7 unidades. Calcular la menor distancia entre las rectas AC y MG, siendo "M" punto medio de la arista AD.

a) $\sqrt{9}$ b) $\sqrt{3}$ c) 3

d) $\frac{7}{3}$ e) $\sqrt{2}$

58. Calcular la medida del ángulo diedro formado por dos caras adyacentes de un tetraedro regular.

a) $\text{ArcTan}(\frac{\sqrt{6}}{2})$ b) 90º

c) 60º d) $\text{ArcSen}(\frac{2\sqrt{2}}{3})$

e) $\text{ArcSen}(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}})$

59. En un hexaedro ABCD-EFGH, "O" es el centro de la cara ABCD, P de $\overline{AG}$; de tal manera que :
m$\sphericalangle$ OPA = 90º y OF = $2\sqrt{5}$.
Calcular : $(PG)^2 - (AP)^2$.

a) 200 b) 180 c) 160
d) 140 e) 120

60. El volumen de un octaedro regular es igual a $\sqrt{6}$ u^3. Calcular la distancia del centro del octaedro a una de sus caras.

a) $\sqrt{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ c) 1

d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) $\frac{\sqrt{6}}{6}$

Claves

21.	b
22.	a
23.	e
24.	d
25.	e
26.	d
27.	e
28.	c
29.	a
30.	c
31.	b
32.	c
33.	c
34.	d
35.	c
36.	c
37.	c
38.	e
39.	b
40.	b

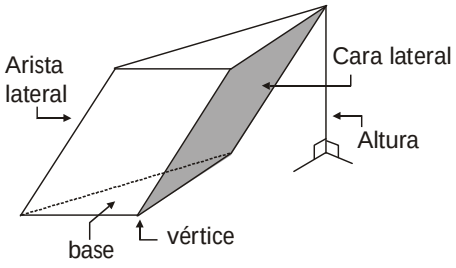
41.	e
42.	c
43.	a
44.	b
45.	a
46.	d
47.	b
48.	e
49.	b
50.	a
51.	b
52.	c
53.	a
54.	b
55.	c
56.	b
57.	d
58.	d
59.	e
60.	d

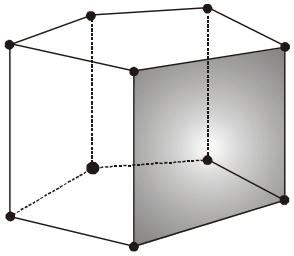
Capítulo

18 PRISMA - CILINDRO - TRONCOS

PRISMA - CILINDRO

PRISMA

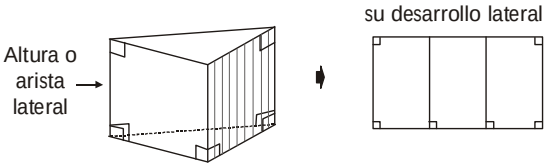




El nombre del prisma depende del polígono de la base. Los gráficos muestran a un prisma triangular y a otro hexagonal.

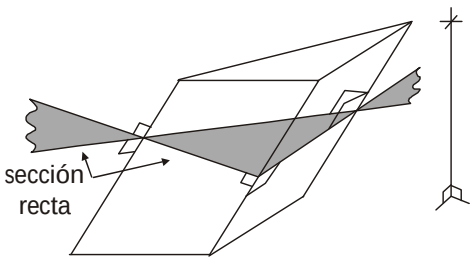
Clasificación

I. Prisma Recto



$$A_L = (2P_{BASE}).(\text{Arista Lateral})$$
$$A_T = A_L + 2A_{BASE}$$
$$V = (A_{BASE}).\text{altura}$$

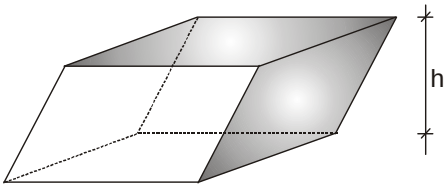
II. Prisma Oblicuo



$$A_L = (2P_{S.R}).(\text{Arista Lateral})$$
$$V = (A_{S.R}).(\text{Arista Lateral})$$
$$V = (A_{BASE}).(\text{Altura})$$

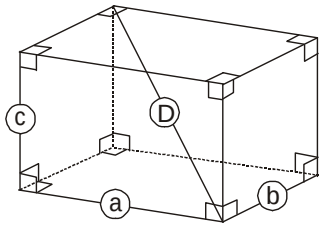
III. Paralelepípedo

Las caras opuestas son paralelogramos congruentes y de planos paralelos.



$V = (A_{BASE})$. Altura

* Paralelepípedo rectangular
(Rectoedro y ortoedro)

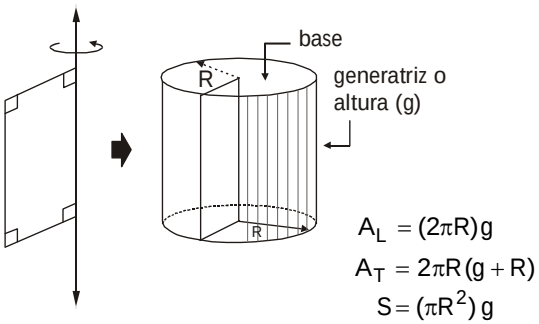


Área = $2(ab+bc+ac)$

Volumen = abc

$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$

CILINDRO

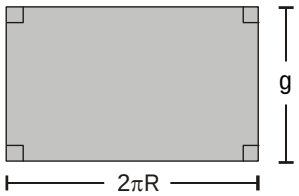


$A_L = (2\pi R)g$

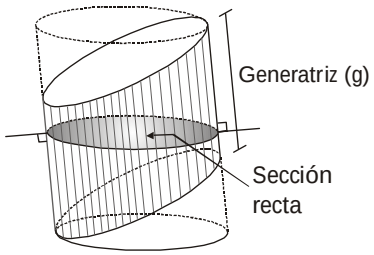
$A_T = 2\pi R(g+R)$

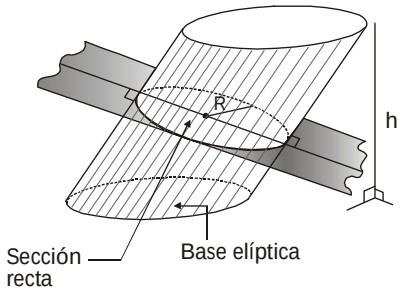
$S = (\pi R^2)g$

su desarrollo lateral



Cilindro oblicuo obtenido al cortar a un cilindro recto mediante dos planos paralelos entre sí; pero inclinados respecto de la base.





$A_L = (2P_{S.R})$(generatriz)

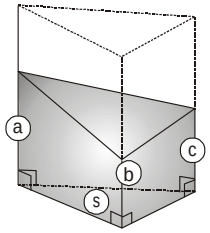
$A_T = A_L + 2A_{BASE}$

$V = (A_{S.R})$.(generatriz)

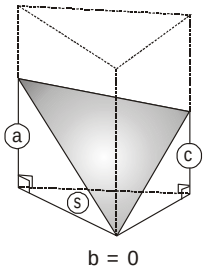
$V = (A_{BASE})$(Altura)

TRONCOS DE PRISMA Y CILINDRO

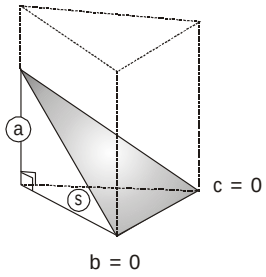
TRONCO DE PRISMA TRIANGULAR RECTO



$$V = \frac{S}{3}(a+b+c)$$

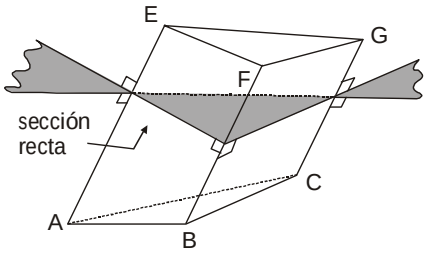


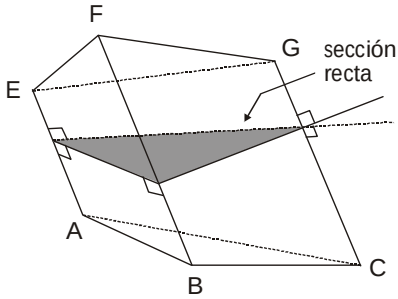
$$V = \frac{S}{3}(a+c)$$



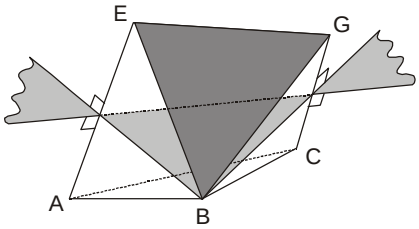
$$V = \frac{a.S}{3}$$

TRONCO DE PRISMA TRIANGULAR OBLICUO

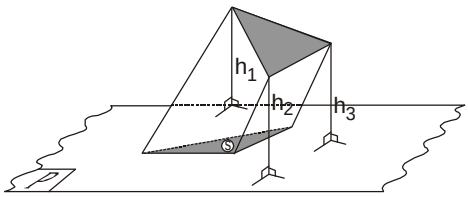




$$V = \frac{(As.R)}{3}(AE+BF+CG)$$

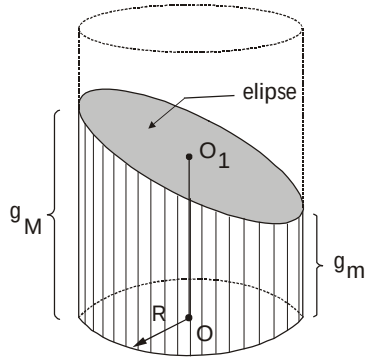


$$V = \frac{(As.R)}{3}(AE+CG)$$

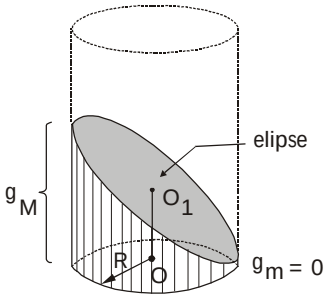


$$V = \frac{S}{3}(h_1+h_2+h_3)$$

TRONCO DE CILINDRO CIRCULAR RECTO



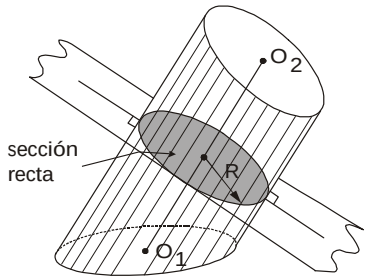
$$A_L = (2\pi R)\ \text{eje}$$
$$A_T = A_L + A_{BASES}$$
$$V = \pi R^2.\text{eje}$$



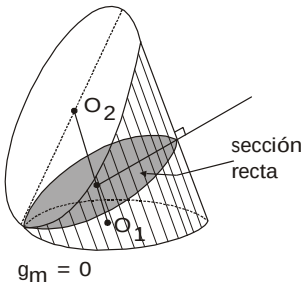
A_L : Área Lateral

$$OO_1 : \text{eje} = \frac{g_M + g_m}{2}$$

TRONCO DE CILINDRO OBLICUO



$$\text{Eje} = \frac{g_M + g_m}{2}$$
$$A_L = (2\pi R)\text{eje}$$
$$A_T = A_L + A_{BASES}$$
$$V = (As.R)(\text{eje})$$



$g_m = 0$

Test de aprendizaje preliminar

01. Un cilindro recto cuya altura es igual al diámetro de la base, tiene un área total de 12π. Calcular su volumen.

02. Las tres dimensiones de un rectoedro están en progresión aritmética y suman 45 unidades. Calcular el volumen, si su área total es igual a $1332\ u^2$.

03. Calcular el volumen de un prisma cuadrangular regular, si la diagonal del desarrollo de la superficie lateral mide 37 unidades y la arista lateral de dicho prisma mide 35 unidades.

04. Calcular el área lateral de un cilindro recto; cuya generatriz mide 12 unidades y su área de base es igual a $16\pi\ u^2$.

05. La diagonal de un paralelepípedo rectangular es igual a $\sqrt{70}$ unidades. Calcular el volumen, si dos de sus dimensiones de dicho paralelepípedo son 3 y 5 unidades.

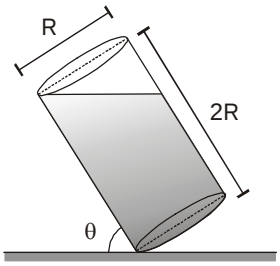
06. Calcular el volumen de un ortoedro, cuyas diagonales de sus caras miden $\sqrt{74}$, $\sqrt{130}$ y $\sqrt{106}$ unidades.

07. Dos cilindros circulares rectos semejantes y de áreas total de $18\pi\ dm^2$ y $50\pi\ dm^2$. ¿En qué relación están sus volúmenes?

08. En un paralelepípedo rectangular las diagonales de las caras miden $\sqrt{34}$, $\sqrt{58}$ y $\sqrt{74}$ cm.
El volumen del paralelepípedo, en m^3, será :

09. En un prisma triangular regular, se inscribe un cilindro. ¿Qué relación existe entre las áreas laterales de estos dos cuerpos?

10. Un cilindro contiene las tres cuartas partes de su volumen con agua. Si se inclina como se muestra en la figura, ¿cuánto debe medir "θ" para que el agua no se derrame?



Practiquemos :

11. En una piscina de 40 m de largo, 12 m de ancho y 3,5 m de alto, se introducen 720000 litros de H_2O. ¿A qué distancia del borde llega el H_2O?

12. Calcular el volumen de un cilindro generado por la rotación de un rectángulo alrededor de un lado, si el área del rectángulo generador es igual a 16 y la longitud de la circunferencia que describe el punto de intersección de las diagonales es igual a 2π.

13. Calcular la altura de un prisma pentagonal regular de $440\ m^2$ de área total, si el área de la base es $50\ m^2$ y el apotema del pentágono mide 5 m.

14. Sea ABC-PQR un prisma triangular regular cuya arista básica mide 6 dm. Se traza un plano secante que pasa por $\overline{PB}$ y corta a $\overline{RC}$ en E. Si : EC = 4 dm y ER = 6 dm, calcular el volumen del sólido ABC-PBE.

15. Las bases de un paralelepípedo recto son rombos cuyas regiones tienen áreas igual a S_1. Las áreas de las secciones determinadas por los planos diagonales son iguales a S_2 y S_3, respectivamente. Calcular el volumen de dicho paralelepípedo.

16. Calcular el volumen de un rectoedro, cuyas dimensiones son congruentes, a las aristas básicas de un prisma recto triangular de volumen "V", cuya altura es igual al duplo del diámetro de la circunferencia circunscrita a su base.

17. El área de una de las caras de un prisma triangular es de $24\ u^2$ y la arista opuesta dista de dicha cara en 10 unidades. Calcular el volumen de dicho prisma.

18. Calcular el volumen de un cilindro recto circunscrito a un prisma triangular regular, cuyas caras laterales son cuadradas y el área de la base dicho prisma es de $3\sqrt{3}\ u^2$.

19. Calcular el volumen de un prisma triangular regular circunscrito a una esfera de 6 unidades de diámetro.

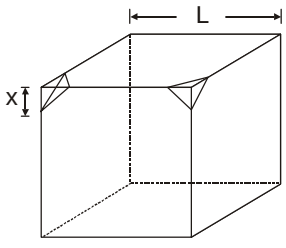
20. Calcular el área total de un cilindro recto circunscrito a una esfera de 12 unidades de radio.

Problemas propuestos

21. La base de un paralelepípedo recto es un rombo, cuya área es igual a S.
Las áreas de las secciones diagonales son iguales a S_1 y S_2. Hallar el volumen del paralelepípedo.

a) $\sqrt{\frac{S.S_1.S_2}{2}}$ b) $\sqrt{\frac{S.S_1.S_2}{4}}$
c) $\sqrt{\frac{S.S_1.S_2}{3}}$ d) $\sqrt{\frac{S.S_1.S_2}{5}}$
e) $\sqrt{\frac{S.S_1.S_2}{6}}$

22. En un cubo de arista L, a una distancia de "x" unidades de cada vértice sobre la arista, se efectúan cortes como indica la figura (pirámide triangular). Si la suma de los volúmenes de estas pirámides es igual a la quinta parte de lo que queda, la razón x/L, es :



a) 1/6 b) 1/5 c) 1/4
d) 1/3 e) 1/2

23. La base de una pirámide triangular regular de 24 unidades cúbicas de volumen, descansa sobre una mesa, frente a la cual está un espejo en posición vertical. Si las imágenes de los vértices de dicha base distan 7,7 y 13 unidades de la superficie del espejo, ¿cuál es la altura de la pirámide?

a) $5\sqrt{3}$ b) 6 b) $4\sqrt{3}$
d) $2\sqrt{3}$ e) $3\sqrt{3}$

24. Se tiene un tronco de prisma recto de bases planas ABCD y D' C' B' A'. La primera base es un cuadrado de 7 cm de lado y la segunda es un paralelogramo. Hallar el volumen del sólido, sabiendo que las aristas AA' = 4 cm; BB' = 5 cm y CC' = 10 cm.

a) 228 cm^3 b) 268 c) 286
d) 300 e) 343

25. Hallar el volumen del sólido formado al unir los puntos medios de las aristas de hexaedro regular, cuya arista mide 8 cm.

a) 512 cm^3 b) 1024/3 d) 1280/3
d) 1160/3 e) 1536/3

26. Se tiene un tetraedro regular ABCD cuya arista mida "a" y tal que sus vértices se encuentran sobre la superficie de un cilindro recto que tiene por generatriz la arista AB. Hallar el volumen del cilindro.

a) $\frac{4\pi a^3}{25}$ b) $\frac{3\pi a^3}{16}$ c) $\frac{5\pi a^3}{28}$
d) $\frac{9\pi a^3}{32}$ e) $\frac{7\pi a^3}{40}$

27. Se tiene un tronco de cilindro circular recto en el que su volumen es numéricamente igual al valor de su área lateral. Si la diferencia entre las generatrices máxima y mínima del tronco de cilindro es π, hallar la longitud de la elipse que constituye su base superior.

a) $\pi\sqrt{5}$ b) $\pi\sqrt{7}$ c) $2\pi\sqrt{5}$
d) $2\pi\sqrt{7}$ e) 4π

28. Una chimenea de 3m de altura tiene forma prismática hexagonal regular. Hallar su espesor, si el volumen de fábrica es igual al volumen interior. El lado del hexágono interior $\sqrt{2}$.

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}(2-\sqrt{2})m^2$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}(3-\sqrt{2})$
c) $\frac{\sqrt{2}}{2}(2-\sqrt{2})$ d) $\frac{\sqrt{3}}{2}(1-\sqrt{2})$
e) $\frac{\sqrt{3}}{2}(3-\sqrt{3})$

29. Calcular el volumen de un cilindro oblicuo, si la sección recta es un círculo de 4 cm^2 de área y forma con el plano de la base un diedro de 45º, además la distancia de pie de la altura a la generatriz cuyo extremo se traza la altura es $2\sqrt{3}$ cm.

a) $16\sqrt{2}$ b) $8\sqrt{3}$ c) $12\sqrt{2}$
d) $16\sqrt{3}$ e) $16\sqrt{2}$

30. Hallar el volumen de un tronco de cilindro recto de revolución en donde la generatriz mayor es "a" y la menor es nula, las bases forman un diedro de 45º.

a) $a^3\pi$ b) $\pi\sqrt{2}a^3$ c) $\frac{\pi a^3}{8}$
d) $\frac{a^3\pi}{2}$ e) $\frac{\pi a^3}{3}$

31. En un tronco de cilindro circular recto, la diferencia de la generatriz máxima y la mínima es de π dm. Si el volumen es numéricamente igual al área lateral, calcular el perímetro de la base elíptica.

a) $\pi\sqrt{5}$ dm b) $10\pi\sqrt{5}$ c) $2\pi\sqrt{5}$
d) $4\pi\sqrt{3}$ e) $2\pi\sqrt{2}$

32. Calcular el volumen de un tronco cilindro oblicuo, conociendo que la sección recta es un círculo y forma con la base mayor un diedro de 45º; además, el área de la base mayor es de 60 u^2 y las generatrices máxima y mínima miden 10 dm y 4 dm en ese orden.

a) $240\sqrt{6}\ dm^3$ b) $160\sqrt{3}$
c) $210\sqrt{2}$ d) $190\sqrt{3}$
e) $220\sqrt{2}$

33. Hallar el volumen de un tronco de cilindro recto circunscrito a una esfera de radio 2. El diámetro de la base mide 6 y la generatriz mínima del tronco es nula.

a) 60π b) 45π c) 12π
d) 36π e) 40π

34. La base de un prisma recto, cuya altura es igual a 1 m; es un rombo con lados iguales a 2 cm y ángulo agudo de 30º. Por un lado de la base se traza un plano secante entre él y el plano de la base, forman un ángulo igual a 60º. Hallar el área de la sección.

a) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ b) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$
d) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ e) $\frac{3\sqrt{3}}{3}$

35. Hallar el área lateral de un cilindro de revolución, sabiendo que una sección perpendicular a la base tiene área $2m^2$ y determinar, en ellas arcos, de medida 90º?

a) $2\pi cm^2$ b) π c) $\pi\sqrt{2}$
d) $2\pi\sqrt{2}$ e) 2π

36. Una población tiene 500 habitantes que consumen en promedio por persona 12 litros de agua diariamente. Determinar el radio de un pozo cilíndrico que abastezca a la población y que tenga capacidad para una reserva de 25% del consumo diario y tal que la altura sea 4 veces el diámetro.

a) $\sqrt[3]{\frac{25}{\pi}}$ b) $\sqrt[3]{\frac{50}{\pi}}$ c) $\sqrt[3]{\frac{75}{\pi}}$
d) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{25}{\pi}}$ e) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{75}{\pi}}$

37. Sea ABC-FED un tronco de prisma triangular recto, donde la base recta es el triángulo rectángulo isósceles ABC de hipotenusa AC = $3\sqrt{2}$. La otra base FED es un triángulo equilátero y cuya cara lateral es un rectángulo cuya altura es una arista lateral y mide 6 dm. Calcular el volumen de dicho tronco.

a) 33,6 dm^3 b) 41,5 c) 30,6
d) 631,5 e) 45,7

38. En un tronco de cilindro circular recto, la generatriz mínima es nula y las bases forman un diedro de ángulo rectilíneo igual a 60º. Calcular el volumen del sólido, si la suma de las áreas de las bases es $48\pi\ dm^2$.

a) 695,32 dm^3 b) 965,23
c) 895,32 d) 348,23
e) 665,32

39. ABCD-AEFD es un tronco de prisma recto, donde la base recta ABCD es un trapecio isósceles cuyas bases $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ miden 10 dm y 20 dm, en ese orden. Si $\overline{AB}$ mide 13 dm y las bases forman un diedro de 60º, calcular el área de la base AEFD.

a) 460 dm^2 b) 260 c) 360
d) 480 e) 370

40. En un tronco de cilindro circular recto, se encuentra inscrita una esfera de radio igual a 6 dm. El eje mayor de la elipse forma un ángulo de 37º con la generatriz máxima. Determinar el volumen de dicho tronco.

a) 576π b) 496π c) 136π
d) 468π e) 586π

41. Un tronco de cilindro oblicuo tiene como sección recta a un círculo de 8π dm de perímetro. Las generatrices máxima y mínima miden 14 dm y 4 dm, en ese orden. Calcular la relación entre el volumen y la generatriz mayor del tronco.

a) $\frac{72}{7}\pi dm^2$ b) $\frac{62}{5}\pi$ c) $\frac{27}{8}\pi$

d) $\frac{47}{5}\pi$ e) $\frac{73}{6}\pi$

42. Grafique al triángulo ABC, de modo que :
AB = 6 dm, BC = 8 dm, y AC = 10 dm. Perpendicularmente a su plano se levanta $\overline{AE}$, $\overline{BF}$ y $\overline{CH}$ que miden 2 dm, 8 dm y 4 dm en ese orden. Calcular el volumen del sólido ABC-EFH.

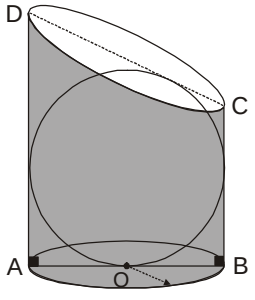
a) 112 dm^3 b) 168 c) 336
d) 224 e) 102

43. En un tronco de cilindro circular recto, las generatrices máxima y mínima miden 10 dm y 4 dm en ese orden. Si el diámetro de la base circular es congruente al eje del sólido, calcular el área lateral del sólido.

a) $48\pi dm^3$ b) 72π c) 49π

d) 94π e) 98π

44. La figura muestra a un tronco de cilindro recto, donde el área de la sección ABCD es de 18 dm^2 y la distancia de "O" a DC es de 3,6 dm. Calcular el volumen del tronco de cilindro recto.



a) $14\pi dm^3$ b) 24π c) 9π

c) 18π e) 21π

45. En un tronco de prisma recto (cuya sección recta es un triángulo), se inscribe una pirámide cuya base es la misma del tronco y cuyo vértice es el punto de intersección de las medianas de la otra base. Calcular la relación de volúmenes de estos sólidos.

a) $\frac{1}{9}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{2}$

d) $\frac{2}{9}$ e) $\frac{2}{3}$

46. El lado de un cuadrado ABCD, mide $\sqrt{2}$ dm; se levantan las perpendiculares $\overline{AE}$ y $\overline{CF}$ la plano del cuadrado ABCD.
Si : AE = 6 dm y CF = 9 dm, calcular el volumen del sólido de la base ABCD, aristas laterales $\overline{AE}$ y $\overline{CF}$. ($\overline{EF}$ es un arista de la parte superior del sólido).

a) 5 dm^3 b) 10 c) 12
d) 8 e) 9

47. Calcular el área total de un tronco de prisma regular, cuya base es un cuadrado de 3 dm de lado. Las bases forman un ángulo de 45º y dos aristas laterales opuestas son congruentes y de longitud igual a 8 dm.

a) 117,69 b) 123,42 c) 107,82
d) 217,69 e) 171,69

48. Se tiene un prisma recto triangular ABC-DEF inscrito en un cilindro equilátero, de modo que :
AB = $6\sqrt{3}$; BC = 6 y AC = 12.
Calcular la longitud de menor recorrido sobre la superficie lateral del cilindro para ir de B a un punto de la generatriz AD y luego hacia F.

a) $6\sqrt{4+5\pi^2}$ b) 12π

c) $3\sqrt{12+5\pi^2}$ d) $2\sqrt{36+25\pi^2}$

e) 15π

49. En la base de un cilindro de revolución se inscribe un hexágono regular ABCDEF, luego se trazan las generatrices Al, BM, DN y EO. Calcular la razón de los volúmenes del cilindro y del sólido ABDE-LMNO.

a) π b) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{\sqrt{6}}{\pi}$

d) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ e) $\frac{\sqrt{5}}{\pi}$

50. Un cilindro recto contiene agua hasta cierto nivel. Se suelta un tetraedro regular metálico y el nivel del agua sube en $2\sqrt{2}$ unidades. Calcular la altura del tetraedro, si el área de la base del cilindro es de $9\pi u^2$.

a) $2\sqrt{3}\pi$ b) $\frac{2\sqrt{6}}{\pi}$ c) $\frac{12^3\sqrt{\pi}}{\sqrt{6}}$

d) $\frac{4^3\sqrt{\pi}}{\sqrt{3}}$ e) $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

51. Los puntos A y B son los extremos de una misma generatriz de un cilindro de revolución, cuyo radio de base mide 3 unidades y su altura es de 5 unidades. Calcular la mínima longitud de la curva para ir de A a B, dando una vuelta sobre la superficie lateral del cilindro.

a) 6π b) $\sqrt{50+18\pi^2}$
c) $3\sqrt{5+3\pi}$ d) $\sqrt{25+36\pi^2}$
e) 9π

52. Calcular el volumen de un cilindro recto, si el desarrollo de su superficie lateral tiene un área de 180 πu^2 y la distancia entre los centros de las bases de dicho cilindro mide 15 unidades.

a) $540\,\pi u^3$ b) $480\,\pi$ c) $440\,\pi$
d) $560\,\pi$ e) $380\,\pi$

53. El área total de un prisma triangular regular es $2\sqrt{3}\,(\frac{1+6\sqrt{3}}{2})\,u^2$. Calcular el volumen del prisma, cuya arista lateral es el triple de la arista básica.

a) $12\,u^3$ b) $6\sqrt{3}$ c) $\frac{3}{2}\sqrt{6}$
d) $12\sqrt{3}$ e) $18\sqrt{3}$

54. Las aristas básicas de un prisma recto triangular miden 20, 21 y 29 unidades, respectivamente. Calcular el volumen del prisma, cuya arista lateral es igual al triple del inradio de la base de dicho prisma.

a) 2100 u^3 b) $1200\sqrt{3}$ c) 3780
d) $1800\sqrt{2}$ e) 4200

55. $\overline{AE}$ y $\overline{BF}$ son las generatrices menor y mayor, respectivamente, de un tronco de cilindro recto, cuyo diámetro AB de la base mide $4\sqrt{5}$ unidades. $\overline{BE}$ es perpendicular a $\overline{EF}$, de modo que : EB = 12.
Calcular el volumen de dicho tronco.

a) $260\,\pi u^3$ b) $100\sqrt{6}\,\pi$ c) $280\,\pi$
d) $120\sqrt{3}\,\pi$ e) $300\,\pi$

56. Se tiene un tronco de cilindro recto, cuya generatriz menor es nula y su área lateral es igual a "S". Calcular el volumen de dicho tronco; si su área de base circular es "B".

a) $\frac{S\sqrt{B}}{3}$ b) $\frac{S}{2}\sqrt{\frac{B}{\pi}}$ c) $\sqrt{SB}$
d) $\frac{S\sqrt{B}}{2}$ e) $\frac{SB}{2\pi}$

57. Se tiene un tronco de cilindro oblicuo, cuyas generatrices menor y mayor miden "a" y "b" unidades, respectivamente. Calcular el área lateral de dicho tronco, si el área de su sección recta es "S".

a) $(a+b)\sqrt{S}$ b) $\sqrt{\pi S}\,(a+b)$
c) $\frac{\pi Sb}{a}$ d) $\frac{\pi Sa}{b}$
e) $\pi S(\frac{a+b}{2})$

58. Calcular el volumen de un tronco de prisma recto triangular, cuya base es un triángulo rectángulo isósceles de perímetro igual a $4(1+\sqrt{2})$ unidades y las aristas laterales de dicho tronco miden 7, 9 y 11 unidades respectivamente.

a) $24\sqrt{6}\,u^3$ b) 36 c) $30\,u^3$
d) $30\sqrt{3}$ e) $32\sqrt{2}$

59. Se tiene un tronco de prisma oblicuo triangular, cuya sección recta es un triángulo rectángulo isósceles de cateto igual a 6 unidades de longitud y la distancia entre los baricentros de las bases es igual a 16 unidades. Calcular el área lateral de dicho tronco.

a) $90(2+\sqrt{2})u^2$ b) 224
c) $90(\sqrt{2}+\sqrt{6})$ d) $120(1+\sqrt{3})$
e) 288

60. Por los vértices B y C de un triángulo equilátero ABC, se levantan las perpendiculares BE y CF al plano del triángulo, de tal manera que :
BE = 11, CF = 4 y BC = 6.
Calcular el volumen del sólido ABC-EFA.

a) $60\,u^3$ b) $45\sqrt{3}$ c) 72
d) $30\sqrt{6}$ e) 90

Claves

21.	a
22.	e
23.	d
24.	e
25.	b
26.	d
27.	c
28.	c
29.	d
30.	c
31.	c
32.	c
33.	d
34.	c
35.	d
36.	b
37.	d
38.	a
39.	c
40.	a

41.	a
42.	b
43.	b
44.	b
45.	b
46.	b
47.	c
48.	d
49.	d
50.	a
51.	d
52.	a
53.	c
54.	c
55.	a
56.	b
57.	b
58.	b
59.	e
60.	b

Capítulo

19 PIRÁMIDE - CONO - TRONCOS

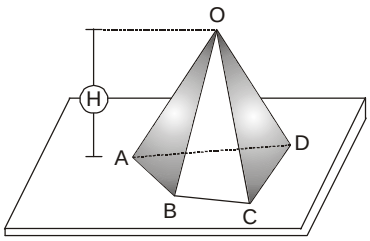
PIRÁMIDE

Elementos :

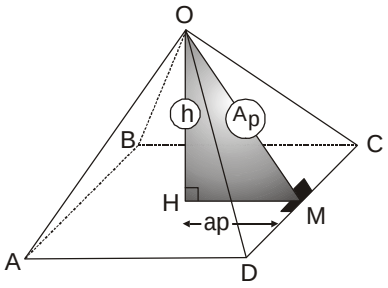
* Vértice : O
* Base : ABCD
* Altura : H
* Arista laterales : $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, ...

Notación :

Pirámide : O - ABCD



Pirámide Regular:



* Apotema de la pirámide : A_P
* Apotema de la base : ap
* Semiperímetro de la base : P_{BASE}
* ***Área Lateral*** : (A_L)

$$A_L = P_{BASE} \cdot A_P$$

* ***Área Total*** : (A_T)

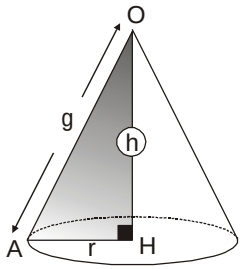
$$A_T = P_{BASE} (A_P + a_P)$$

* ***Volumen :*** (V)

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{BASE} \cdot h$$

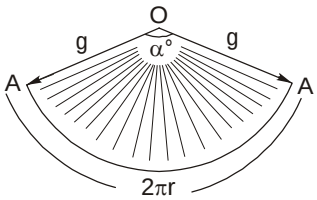
en cualquier pirámide

CONO DE REVOLUCIÓN



* Generatriz : g
* Radio de la base : r

* ***Desarrollo del Área Lateral (A_L)***



* ***Área Lateral (A_L)***

$$A_L = \pi rg$$

* ***Área Total (A_T)***

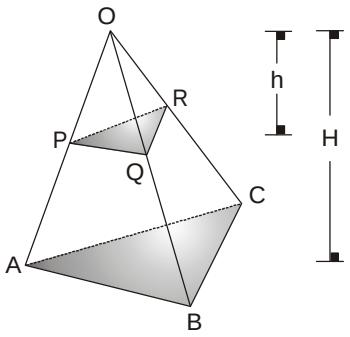
$$A_T = \pi r (g + r)$$

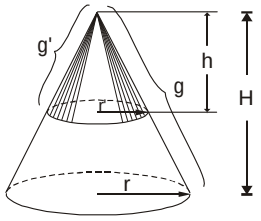
* ***Volumen (V)***

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

TRONCO DE PIRÁMIDE Y CONO

Sección paralela a la base de una pirámide y de un cono recto :





Propiedades :

1. $\frac{A_L O-PQR}{A_L O-ABC}=\frac{A_T O-PQR}{A_T O-ABC}=\frac{h^2}{H^2}=\frac{OP^2}{OA^2}=\frac{PQ^2}{AB^2}$

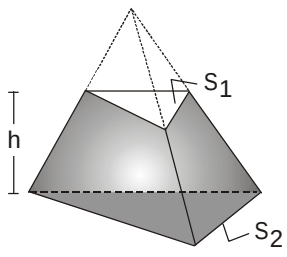
$$\frac{A'_L}{A_L}=\frac{A_T'}{A_T}=\frac{g'^2}{g^2}=\frac{r'^2}{r^2}=\frac{h^2}{H^2}$$

2. $\frac{V_O-PQR}{V_O-ABC}=\frac{h^3}{H^3}=\frac{OQ^3}{OB^3}=\frac{QR^3}{BC^3}$

$$\frac{V'}{V}=\frac{g'^3}{g^3}=\frac{r'^3}{r^3}=\frac{h^3}{H^3}$$

* V' = volumen del cono sombreado.
* V = volumen del cono mayor.

TRONCO DE PIRÁMIDE

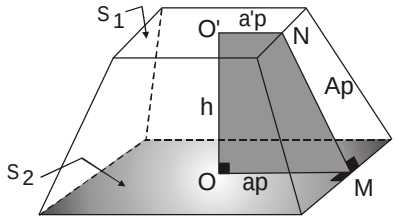


* ***Volumen (V)***

$$V=\frac{h}{3}(S_1+\sqrt{S_1.S_2}+S_2)$$

TRONCO DE PIRÁMIDE REGULAR

* Apotemas de las bases: a' p, y ap.
* Apotema del tronco: Ap
* Semiperímetro de las bases: p' y p.



* ***Área Lateral (A_L)***

$$A_L=(p'+p).Ap$$

* ***Área Total (A_T)***

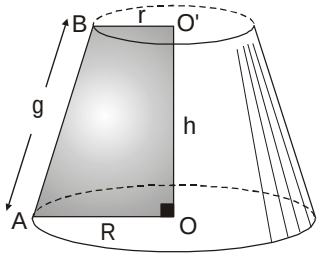
$$A_T=A_L+S_1+S_2$$

* ***Volumen (V)***

$$V=\frac{h}{3}(S_1+\sqrt{S_1.S_2}+S_2)$$

TRONCO DE CONO O DE REVOLUCIÓN

* Radios de las bases: R y r
* Generatriz del tronco: g



* ***Área Lateral (A_L)***

$$A_L=(\pi r+\pi R)g=\pi g(r+R)$$

* ***Área Total (A_T)***

$$A_T=A_L+\pi r^2+\pi R^2$$

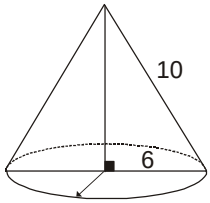
* ***Volumen (V)***

$$V=\frac{h}{3}(\pi r^2+\sqrt{\pi r^2 \pi R^2}+\pi R^2)$$

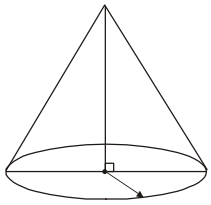
$$V=\frac{\pi h}{3}(r^2+Rr+R^2)$$

Test de aprendizaje preliminar

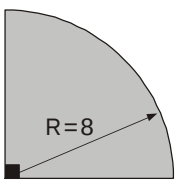
01. En el cono recto, hallar:
    * Área lateral
    * Área total
    * Volumen



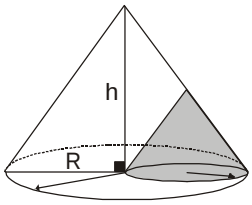
02. Hallar el volumen de un cono de revolución de área lateral igual a "m". La distancia del centro de la base a una de sus generatrices es 2n.



03. Calcular el volumen de un cono de revolución en el cual el desarrollo de su superficie lateral se muestra.



04. Calcular la medida del ángulo del desarrollo que se obtiene, al desarrollar la superficie lateral del cono menor, si tiene una generatriz paralela a la generatriz mayor, $h = \sqrt{15}$; R = 1.

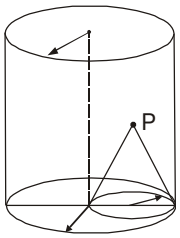


05. Calcular la longitud de la altura de una pirámide cuadrangular regular, si el lado de la base mide "a" y el área de dicha base es los $\frac{4}{9}$ del área total.

06. Se tiene una pirámide V-ABCD tal que ABCD es un paralelogramo cuyas diagonales miden AC=10 y BD=8. Hallar el valor de:

$$E = (VA)^2 + (VC)^2 - (VB)^2 - (VD)^2$$

07. En la figura, calcular la distancia "P" a la base superior, si el cilindro recto mostrado es equivalente a 18 conos de revolución como el que se indica en su parte interior, la altura de dicho cono mide 8 cm.



08. Calcular el volumen de una pirámide cuyas caras laterales son triángulos equiláteros y cuya base es un cuadrado de lado "a".

09. Se tiene un cono recto de altura 40 y radio 30, se inscribe una esfera en el cono, cuya línea de tangencia lo ha dividido en dos sólidos. Calcular el volumen del cono superior.

10. En una pirámide hexagonal regular, su altura mide 18 y la arista de la base mide 12. Calcular a qué distancia del vértice se debe trazar un plano paralelo a la base para que la sección resultante tenga un área de $72\sqrt{3}$.

Practiquemos :

11. Una pirámide cuadrangular regular tiene como arista básica 5dm y es cortado mediante un plano paralelo a la base a 6dm de su vértice. Si la sección que se determina es de $4dm^2$ de área, hallar el volumen del tronco de pirámide que se determina.

12. La altura de un cono recto se divide en tres segmentos congruentes por dos puntos, por dichos puntos se trazan planos paralelos a las bases. Calcular el volumen de la parte mayor, si el volumen del cono es de $27m^3$.

13. En una pirámide cuya base es un triángulo equilátero, su altura es igual al radio del círculo circunscrito a la base. A una distancia igual a la medida del inradio de la base, se traza un plano paralelo a ésta que determina un tronco de pirámide cuyo volumen se pide calcular en función del circunradio R de la base.

14. ¿A qué distancia del vértice de una pirámide cuya altura mide 8 cm, se debe trazar un plano paralelo a la base para que se determine dos sólidos equivalentes?

15. El área lateral de un cono de revolución mide "M" y la distancia del centro de la base a una de sus generatrices mide "N". Entonces el volumen de dicho, cono es:

16. Dado una pirámide regular hexagonal, la arista de la base es "b". Si la arista lateral mide "3b", hallar la distancia del pie de la altura a una arista lateral.

17. En una pirámide cuadrangular regular, la arista lateral forma 37° con el plano base. Calcular el valor del ángulo diedro que forma la cara lateral con la base.

18. Calcular el área lateral de un cono de revolución de altura "h", si la porción de perpendicular trazada a una generatriz por un punto de la circunferencia base e interceptada por la prolongación de la altura mide "a".

19. La generatriz de un cono mide 12dm y la superficie lateral desarrollada forma un semicírculo. Calcular el volumen de dicho cono.

20. Los volúmenes que genera un triángulo rectángulo cuando gira alrededor de sus catetos son de $3dm^3$ y $4dm^3$. Calcular el volumen que genera el triángulo cuando gira alrededor de la hipotenusa.

Problemas propuestos

21. Determinar el volumen de un tronco de cono de revolución, cuyas bases tienen como áreas $16\pi dm^2$ y $81dm^2$. Además, el área total del tronco es de $266\pi dm^2$.

a) $352\pi dm^3$ b) 432π c) 502π
d) 532π e) 842π

22. Calcular el volumen de un tronco de cilindro recto, conociendo que la sección recta es un círculo y forma con una base mayor un diedro de 45°; además el área de la base mayor es 60u y las generatrices máxima y mínima son 10 y 4u, respectivamente.

a) $210\sqrt{2}\,u^3$ b) $180\sqrt{2}$ c) $220\sqrt{2}$
d) $240\sqrt{2}$ e) $190\sqrt{2}$

23. En un tronco de pirámide cuadrangular las bases distan $2\sqrt{3}\,u$, la arista básica menor mide 2u y las caras laterales están inclinadas con respecto a la base un ángulo diedro cuya medida es 60°. Calcular el área de la superficie total.

a) $116\ u^2$ b) 96 c) 104
d) 102 e) 100

24. El volumen de un tronco de cono de revolución es $336\pi\ cm^3$ la altura mide 4cm y el radio de la base mayor es el doble del radio de la base menor. Hallar el radio de la base mayor.

a) 12 cm b) 6 c) 8
d) 5 e) $4\sqrt{2}$

25. Una cuerda del círculo base de un cono circular recto de 8m de altura, mide 16m. La distancia de la cuerda al centro del círculo de la base es de 4m. Calcular el área lateral del cono.

a) $12\pi\ m^2$ b) $48\sqrt{5}\pi$ c) 96π
d) $96\sqrt{5}\pi$ e) 48π

26. Sea F-ABCD una pirámide donde las aristas laterales son congruentes y miden $5\sqrt{2}$ dm. $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ miden 8dm y 6dm en ese orden. Calcular el volumen del sólido, sabiendo además que la base es un rectángulo.

a) 80/3 dm^3 b) 40 c) 80
d) 90 e) 50/3

27. En un cono recto de revolución, el punto medio de una generatriz dista de la base 6dm. Si el radio es de 4dm, calcular la capacidad de dicho cono.

a) $32\pi\ dm^3$ b) 64π c) 46π
d) 54π e) 60π

28. Se inscribe una esfera en un cono cuya base tiene una longitud de 10πdm y una altura de 12dm. Calcular el área de la sección que determina los puntos de tangencia de la esfera y la superficie lateral del cono.

a) $\frac{1600\pi}{169}\ dm^2$ b) $\frac{160\pi}{19}$ c) $\frac{1060\pi}{19}$
d) $\frac{1200\pi}{149}$ e) $\frac{1600\pi}{20}$

29. En una pirámide S-ABC, la base ABC y la cara SBC son triángulos equiláteros. Si : AS = 4 y BC = 6, calcular el volumen de la pirámide S-ABC.

a) $4\sqrt{23}$ b) $2\sqrt{26}$ c) $3\sqrt{23}$
d) $\sqrt{26}$ e) $5\sqrt{26}$

30. Calcular el volumen de una pirámide cuya base es un trapecio rectángulo de diagonales perpendiculares y base mayor igual a 16m. Además, se sabe que el pie de la altura de la pirámide coincide con el punto de intersección de las diagonales de la base y que los ángulos diedros cuyas aristas son las bases mayor y menor del trapecio rectángulo; miden 45° y 53°, respectivamente.

a) 482 m^3 b) 506 c) 512
d) 525 e) 600

31. Se da una pirámide regular de base cuadrada S-ABCD con el vértice S, por los puntos A y B y el punto medio de la arista $\overline{SC}$ se ha trazado un plano. ¿En qué relación el plano divide al volumen de la pirámide?

a) 1/2 b) 2/3 c) 3/2
d) 3/4 e) 3/5

32. Se construye un cono circular recto de 10dm de altura y se le inscribe una esfera de 8dm de diámetro, ¿cuál es el volumen del cono?

a) $\frac{400\pi}{3}\ dm^3$ b) $\frac{800\pi}{3}$ c) $\frac{500\pi}{3}$
d) $\frac{700\pi}{3}$ e) $\frac{100\pi}{3}$

33. En un cono de revolución, se inscribe dos esferas de radios 2dm y 6dm. Calcular el volumen del cono.

a) $190\pi dm^3$ b) 810π c) 790π
d) 840π e) 648π

34. En un cono recto de revolución de vértice "O" y diámetro $\overline{AB}$, en la base, se trazan $\overline{AP}$ y $\overline{BQ}$ cuerdas secantes, que forman un ángulo de 45. Hallar $m\sphericalangle POQ$, si la altura del cono es igual al radio de la base.

a) 45 b) 90 c) 60
d) 120 e) 75

35. Hallar el volumen de un cono recto de altura 3m, sabiendo que el plano que pasa por el vértice determina en la base una cuerda que subtiende un arco de 120° y que la sección determinada por dicho plano es un triángulo rectángulo.

a) 9π b) 12π c) $18\ \pi$
d) 24π e) $36\ \pi$

36. Se tiene una pirámide cuadrangular regular en la cual una arista lateral y la altura forman un ángulo cuya medida es 30°. Calcular la medida del ángulo diedro que forma el plano de la base y un plano perpendicular a una arista lateral.

a) 45° b) 53° c) ArcCtg$\sqrt{2}$
d) ArcTg$\sqrt{5}$ e) 30°

37. Por el incentro del triángulo ABC cuyos lados miden 5m, 6m y 7m, se traza la perpendicular al plano de dicho triángulo. Si : IO = $2\sqrt{2}$, hallar la suma de las áreas de las caras laterales de la pirámide O-ABC.

a) 144 b) $14\sqrt{6}$ c) $12\sqrt{6}$
d) $6\sqrt{6}$ e) $18\sqrt{6}$

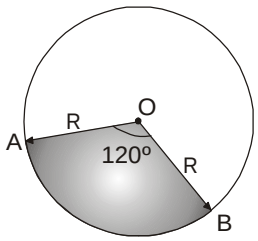
38. La base de una pirámide es un triángulo equilátero y las caras laterales son triángulos isósceles rectángulos. Si las aristas laterales miden 4 dm, calcular el área total de la pirámide.

a) $4(6+2\sqrt{3})m^2$ b) $2(2+3\sqrt{3})$
c) $4(3+3\sqrt{3})$ d) $3(4+2\sqrt{3})$
e) $5(6+2\sqrt{3})$

39. Hallar el volumen de una pirámide irregular O-ABCD, sabiendo que su base ABCD es un cuadrado de lado "a", su cara lateral AOB es un triángulo rectángulo (recto en "O") y su cara lateral COD es un triángulo equilátero.

a) $a^3\sqrt{3}/12$ b) $a^3\sqrt{3}/4$
c) $2a^3\sqrt{3}/3$ d) $a^3\sqrt{2}/12$
e) $a^3\sqrt{2}/4$

40. De una lámina de lata circular de radio "R", se extrae un sector circular de 120º, como se muestra en la figura, uniendo los extremos $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ se construya un embudo. Calcular la capacidad de dicho embudo.



a) $\frac{2}{81}\pi\sqrt{2}R^3$ b) $\frac{4}{9}\pi\sqrt{3}R^3$
c) $\frac{2}{27}\pi\sqrt{2}R^3$ d) $\frac{2}{87}\pi\sqrt{2}R^3$
e) $\frac{5}{27}\pi\sqrt{3}R^3$

41. Se tienen dos conos rectos congruentes tangentes por sus generatrices y cuyos vértices coinciden, si sus alturas son "h" y el radio de bases es "r"; entonces el área de la región triangular cuyos vértices son los centros de las bases y el vértice común de los conos es:

a) 2hr b) $r\sqrt{hr}$
c) $h\sqrt{r^2+h^2}$ d) $\frac{rh^3}{r^2+h^2}$
e) $\frac{hr^3}{h^2-r^2}$

42. La altura y el diámetro de la base de un cono recto miden 18 y 24 unidades respectivamente. En el cono, se inscribe un cilindro recto cuya área total es $260\pi u^2$. Calcular el volumen del cono parcial cuya base es la base superior del cilindro.

a) $500\pi u^3$ b) 480π c) 440π
d) 420π e) 400π

43. En un tronco de pirámide regular cuadrangular, el plano que pasa por un lado de la base mayor y el lado opuesto de la base menor forma con la base mayor un ángulo de 60°. Calcular el volumen de dicho sólido si los lados de las bases miden $\sqrt{3}$ y $3\sqrt{3}$.

a) $26\sqrt{3}$ b) $30\sqrt{3}$ c) 60
d) 70 e) 39

44. Las bases de un tronco de pirámide regular hexagonal tienen $4u^2$ y $9u^2$ de áreas respectivamente; y su altura es igual a la arista de un hexaedro regular equivalente. Calcular el volumen de dicho tronco.

a) $\frac{\sqrt{19}}{3}u^3$ b) $3\sqrt{19}$ c) $3\sqrt{\frac{19}{3}}$
d) $\frac{19}{3}\sqrt{\frac{19}{3}}$ e) $\frac{19}{3}$

45. Calcular el volumen de una pirámide de base triangular en la que dos de sus caras son triángulos equiláteros cuyo lado mide L y las otras dos son triángulos rectángulos isósceles.

a) $\frac{L^3\sqrt{2}}{12}$ b) $\frac{L^3\sqrt{2}}{10}$ c) $\frac{L^3\sqrt{2}}{8}$
d) $\frac{L^3\sqrt{5}}{12}$ e) $\frac{L^3\sqrt{5}}{8}$

46. Un tronco de pirámide equivalente a un hexaedro regular tiene como altura a la arista del hexaedro regular. Hallar el área total del hexaedro conociendo que el tronco de pirámide tiene por bases $1m^2$ y $4m^2$.

a) $13\ m^2$ b) 9 c) 14
d) 15 e) 16

47. Hallar el volumen de un tronco de cono de revolución, cuyo desarrollo del área lateral es un trapecio circular de área 30π, si la altura y la generatriz del tronco miden 3 y 5u respectivamente.

a) 30π b) 31π c) 32π
d) 33π e) 36π

48. Dos bases de un tronco de cono circular son dos círculos de radios que miden 3 y 6m. Si la generatriz mide 6m, hallar la longitud del radio de la esfera circunscrita.

a) 3 m b) 4 c) 5
d) 6 e) 8

49. Calcular el volumen de un tronco de cono de revolución, donde los radios de las bases miden a y 3a. Además, el área lateral es igual a la suma de las áreas de sus bases.

a) $5,5\pi a^3$ b) $3,5\pi a^3$ c) $4,5\pi a^3$
d) $6,5\pi a^3$ e) $7\pi a^3$

50. Calcular el volumen de un tronco de pirámide circunscrito a una esfera, cuyas bases son regiones cuadradas y una cara lateral es perpendicular a las bases. Además, la suma y el producto de las longitudes de dos aristas básicas diferentes es igual a "S" y a "P" respectivamente.

a) $\frac{P}{2}(S^2+P)$ b) $\frac{2P}{3S}(S^2-P)$
c) $\frac{S}{3}(P^2+S)$ d) $\frac{P}{S}(S^2-12P)$
e) $\frac{S}{P}(P^2-2S)$

51. En un tronco de pirámide triangular regular, la arista lateral se encuentra inclinada 45° respecto de la base mayor. Calcular la relación entre el apotema del tronco y su altura.

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{5}}{4}$
d) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ e) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

52. En un tronco de pirámide cuadrangular regular, las aristas básicas miden 4m y 2dm. Si la altura del sólido mide h dm, calcular la capacidad del sólido.

a) $\frac{27}{4}h\,dm^3$ b) $\frac{28}{5}h$ c) $\frac{28}{3}h$
d) $\frac{82}{3}h$ e) $\frac{14}{3}h$

53. Calcular el volumen de un tronco de cono recto, cuyos radios de las bases miden 3 dm y 9 dm. Además, el área lateral del sólido es de $120\pi\,dm^2$.

a) $324\pi\,dm^3$ b) 312π c) 336π
d) 360π e) 348π

54. El lado de la base mayor de un tronco de pirámide regular cuadrangular mide $6\sqrt{2}\,m$ y su altura 3m; las aristas laterales forman ángulos de 45° con el plano de la base mayor. Calcular su volumen.

a) 216 m^3 b) 621 c) 162
d) 136 e) 126

55. En un tronco de cono circular de bases paralelas, los radios de sus bases miden 5dm y 2dm. Si el área lateral es de $35\pi\,dm^2$, calcular el ángulo central del desarrollo lateral.

a) $\frac{5\pi}{7}$ rad b) $\frac{4\pi}{3}$ c) $\frac{2\pi}{3}$
d) $\frac{\pi}{2}$ e) $\frac{6\pi}{5}$

56. Calcular la altura de un tronco de pirámide regular cuadrangular ABCD-EFGH, si el área de la sección plana BFHD es B_1 y el área de la sección determinada en el sólido por un plano equidistante a sus bases es B_2.

a) $\sqrt{\frac{B_1^2}{2B_2}}$ b) $\frac{B_1^2}{B_2}$ c) $\frac{B_2^2}{B_1}$
d) $\frac{B_1B_2}{B_1+B_2}$ e) $\sqrt{B_1+B_2}$

57. Las áreas de las bases elípticas de un tronco de cono oblicuo son de $32\pi\,dm^2$ y $72\pi\,dm^2$. Determinar el valor de la altura de dicho tronco, sabiendo que su volumen es de $304\pi\,dm^3$.

a) 12 dm b) 9 c) $6\sqrt{2}$
d) 6 e) $3\sqrt{6}$

58. En una pirámide triangular regular O-ABC trirectángulo en "O", el volumen es $\frac{\sqrt{3}}{2}u^3$, calcular la distancia del centro de la base a la arista lateral?

a) $\frac{\sqrt{2}}{3}u$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{6}}{2}$
d) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ e) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

59. Calcular el volumen de un tronco de cilindro circular recto, en el cual se inscribe una esfera, además la generatriz mayor y menor miden 4u y 1u.

a) $1{,}4\pi\,u^3$ b) $1{,}6\pi$ c) $1{,}8\pi$
d) $2{,}2\pi$ e) $2{,}4\pi$

60. Las bases de un tronco de cono circular son los círculos de radios 3u y 6u. Si la generatriz mide 6u, ¿cuál es la longitud del radio de la esfera circunscrita?

a) 6 u b) 5 c) 8
d) 9 e) 10

Claves

21.	d
22.	a
23.	c
24.	b
25.	b
26.	c
27.	b
28.	a
29.	a
30.	c
31.	e
32.	b
33.	e
34.	c
35.	c
36.	e
37.	c
38.	a
39.	a
40.	a

41.	d
42.	a
43.	e
44.	d
45.	a
46.	c
47.	b
48.	d
49.	d
50.	b
51.	d
52.	c
53.	b
54.	e
55.	e
56.	a
57.	d
58.	d
59.	b
60.	a

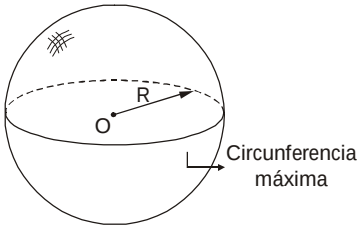
Capítulo

20

ESFERA I

SUPERFICIE ESFÉRICA

Es la superficie que genera la rotación de una semicircunferencia alrededor de su diámetro.

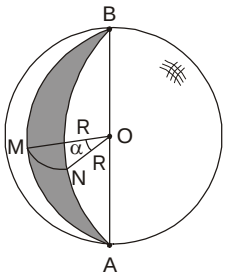


Diámetro = 2R

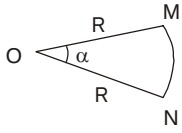
Área = $4\pi R^2$

HUSO ESFÉRICO

Es la porción de superficie esférica limitada por dos circunferencias que tienen el mismo diámetro.



$\overline{AB}$ = diámetro

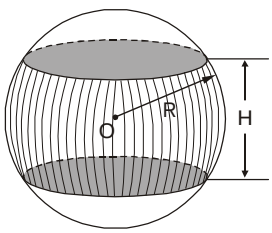


= Sector circular

$$\text{Área} = \frac{\alpha\pi R^2}{90^o}$$

ZONA ESFÉRICA

Es la porción de una superficie esférica comprendida entre dos planos paralelos a la esfera.

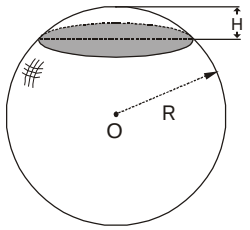


h = altura entre los planos secantes.

Área = $2\pi RH$

CASQUETE ESFÉRICO

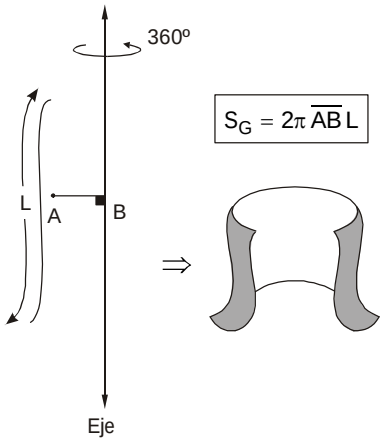
Es la porción de superficie esférica que se encuentra a un lado de un plano secante a la esfera.



Área = $2\pi RH$

Observaciones :
En la figura, existen dos casquetes esféricos.

TEOREMA DE PAPPUS



$S_G = 2\pi \overline{AB} L$

Observaciones :

"A" = Centro de gravedad de la curva.
"L" = Longitud de la curva.

Test de aprendizaje preliminar

01. Calcular el volumen de una esfera, si el área de su círculo mayor es igual a $36\pi u^2$.

02. Hallar el área de la superficie esférica en la cual el área de uno de sus círculos máximos es 100 m^2.

03. Se inscribe un cubo en una esfera de radio $\sqrt{3}\,m$. Calcular su arista.

04. Hallar el radio de la esfera inscrita en un cono equilátero de altura 9.

05. Hallar el área de la esfera inscrita a un cubo, si el área de la esfera circunscrita es 180.

06. Si el área lateral de un cilindro recto es $9m^2$, hallar el área de la esfera inscrita.

07. Hallar la relación entre las áreas de un hexaedro regular y de la superficie esférica circunscrita al hexaedro.

08. Hallar el área de la superficie esférica inscrita a un cono de revolución de radio 3u y altura 4u.

09. Hallar la relación entre las áreas totales entre un cilindro equilátero y la esfera circunscrita al cilindro.

10. ¿A qué distancia del centro de una esfera es 17m de radio debe pasar un plano secante para que la intersección tenga 8m de radio?

Practiquemos :

11. Determinar la superficie de una esfera inscrita a un cubo, que a su vez está inscrita a una esfera cuya superficie es $18u^2$.

12. Se tienen 3 bolas idénticas de volumen $36m^3$. Calcular la altura del cilindro más pequeño que contenga las bolas.

13. Una esfera tiene 3m de radio. ¿A qué distancia del centro debe trazarse un plano secante para que la sección obtenida sea 1/3 del área de un círculo máximo?

14. Se tiene un alambre de $2\pi m^2$ de sección transversal, con el que se forma un ovillo esférico de 3m de radio. Calcular la longitud del alambre.

15. El área de un círculo máximo de una esfera mide $16\pi dm^2$. Se traza un plano secante por el centro, determinando dos semiesferas. Calcular el área de una de estas semiesferas.

16. Se tienen dos esferas metálicas de radios "a" y "2a". Dichas esferas se funden y se construye un cilindro recto cuya altura es "3a". Calcular el radio de la base del cilindro.

17. Hallar el área de la esfera inscrita en un tronco de cono de revolución de volumen $810u^3$ y de área total de 486 u^2.

18. Calcular los radios de las esferas inscrita y circunscrita en un tetraedro regular cuya arista es $4\sqrt{6}$.

19. Determinar el área del casquete esférico que produce un plano secante a una esfera de $18u^2$, de área, trazada a una distancia del centro igual a la mitad de la longitud del radio.

20. El área del huso de 20° es $50\pi m^2$. Hallar la longitud del radio de la esfera.

Problemas propuestos

21. ¿Cuánto mide la cuerda de un arco generador de un casquete esférico cuya área es 36π ?

a) 3 b) 4 c) 6
d) 9 e) 12

22. Determinar la altura de una zona esférica de una base, en una esfera de radio 8u de modo que el área de esta zona aumentada en el área de su base es igual a los 7/16 del área de la esfera.

a) 2 u b) 3 c) 4
d) 5 e) 1

23. Una esfera, cuya superficie tiene una área de $36\pi u^2$, está inscrita en un prisma recto de base triangular rectangular.
Calcular el volumen del prisma mencionado sabiendo que la hipotenusa en su base mide 7u.

a) 150 u^3 b) 120 c) 180
d) 140 e) 160

24. Calcular el área de la zona esférica de dos bases, cuyos radios de base miden 6 y 8 unidades y se encuentran a uno y otro lado del centro de la esfera que contiene a dicha zona. Además, se sabe que la altura es de 14 unidades de longitud.

a) $140\pi u^2$ b) $120\sqrt{2}\pi$ c) 148π
d) $100\sqrt{3}\pi$ e) 280π

25. Dadas tres esferas de radio R; tangentes exteriormente dos a dos y apoyados a un plano. Hallar el radio de la esfera tangente a las tres esferas y al plano.

a) R/2 b) R/4 c) R/3
d) 2R/5 e) R/6

26. Calcular el volumen de una cuña esférica; cuyo ángulo diedro es de 45° y el área del huso esférico correspondiente es igual a $18\pi u^2$.

a) $24\pi u^3$ b) 32π c) 36π
d) 42π e) $18\sqrt{6}\pi$

27. Tres esferas de radios 9u, 16u u 25u son tangentes exteriormente entre sí. Un plano tangente a las tres esferas determina 3 puntos de tangencia que son los vértices de un triángulo, cuyo perímetro se desea conocer.

a) 83 u b) 96 c) 94
d) 86 e) 85

28. Una esfera de centro "O" se encuentra inscrita en un ángulo diedro $\overline{AB}$ de 60º. Si : $BO = 2\sqrt{3}$ y el ángulo ABO mide 30º, calcular el área de la esfera.

a) π b) 2π c) 3π
d) 4π e) 5π

29. El área de una esfera es de $400\pi dm^2$. Dicha esfera es tangente a todos los lados de un rombo. La distancia del centro de la esfera al plano del rombo es de 4dm. Calcular el área de dicho rombo, si la longitud de su lado es de "L" dm.

a) $12L^2dm^2$ b) $2\sqrt{21}L$ c) $8L^2$
d) $8\sqrt{2}L^2$ e) $4\sqrt{21}L$

30. Dado un tetraedro O-ABC, trirectángulo en "O".
Si : OA = 6u, OB = 12u y OC = 18u. Calcular la longitud del radio de la esfera inscrita al tetraedro.

a) 2 u b) 2,5 c) 3
d) 2,8 e) 4

31. En una esfera de radio 10u, a qué distancia del centro hay que trazar un plano secante para que las áreas de los dos casquetes formados estén en la relación de 2 a 3.

a) 1 u b) 1,5 c) 2,5
d) 2 e) 3

32. En una esfera de radio "r", un casquete esférico de altura igual a $\frac{r}{4}$, es equivalente a un huso esférico, cuyo ángulo diedro determinado por sus caras laterales mide "θ". Calcular "θ".

a) 90° b) 60° c) 53°
d) 45° e) 30°

33. Hallar el radio de la esfera circunscrita al octaedro regular de arista "l".

a) $\frac{l\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{l\sqrt{2}}{3}$ c) $\frac{l\sqrt{2}}{4}$
d) $\frac{l\sqrt{2}}{5}$ e) $\frac{l\sqrt{2}}{6}$

34. Hallar el área del casquete generado por un arco cuyos extremos son los de una cuerda de longitud "a".

a) $\frac{\pi a^2}{2}$ b) $\frac{2\pi a^2}{3}$ c) πa^2
d) $\frac{3\pi a^2}{2}$ e) $2\pi a^2$

35. Se tiene una esfera en la que el área del círculo máximo es "S". Hallar el área total de dos semiesferas que resultan al partir a la esfera.

a) 4 S b) 5 S c) 6 S
d) 8 S e) 9 S

36. Determinar la altura de una zona de un base de una esfera de 8u de radio, de modo que la superficie de esta zona aumentada en la superficie de su base sea igual a los 7/16 de la superficie de la esfera.

a) 1 u b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

37. Calcular el área de la superficie esférica de una esfera inscrita en un cono equilátero de $648\pi u^3$ de volumen.

a) $184\pi u^2$ b) 178π c) 164π
d) 158π e) 144π

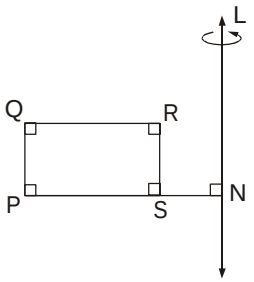
38. Sobre un plano reposan cuatro esferas iguales de radio "R". Tres de ellas hacen contacto entre sí de dos en dos y la cuarta tiene contacto con dos de estas tres. Sobre estas esferas se colocaron dos esferas iguales de menor diámetro que hacen contacto una con la otra y con tres de las esferas dadas inicialmente. Hallar la relación entre los radios de las esferas grande y pequeña.

a) $\sqrt{2}\,u$ b) $\sqrt{3}$ c) $\sqrt{6}$
d) $\sqrt{5}$ e) $\sqrt{7}$

39. En un cono de revolución cuya generatriz mide 5u, se inscribe una esfera tal que el plano que contiene a la circunferencia tangencial determina un cono deficiente de 2u de generatriz. Calcular el área del casquete menor formado.

a) $\frac{6\pi}{5}u^2$ b) $\frac{7\pi}{5}$ c) $\frac{8\pi}{5}$
d) $\frac{9\pi}{5}$ e) 2π

40. En el gráfico, calcular el área de la superficie generada por el rectángulo PQRS al girar 360° en torno a L.
Si : 3PQ = 2PS = 3NS = 6u.



a) $40\pi u^2$ b) 50π c) 60π
d) 70π e) 75π

41. En un cono equilátero, se inscribe una esfera de radio "r". Hallar el volumen del cono parcial que determina el plano que contiene los puntos de tangencia de la esfera; con las generatrices del cono.

a) $\frac{\pi r^3}{6}$ b) $\frac{\pi r^3}{3}$ c) $\frac{3\pi r^3}{8}$
d) $\frac{4\pi r^3}{9}$ e) $\frac{2\pi r^3}{3}$

42. Dado un octaedro regular de volumen $9\sqrt{2}\,u^3$, hallar el área de la superficie esférica inscrita al octaedro.

a) $3\pi u^2$ b) 4π c) 5π
d) 6π e) 9π

43. Un semicírculo de diámetro AB, gira alrededor de su diámetro en un ángulo de 60°. Calcular el volumen del sólido generado si : AB = 6u.

a) $6\pi u^3$ b) 9π c) $3\sqrt{6}\,\pi$
d) $6\sqrt{3}\,\pi$ e) 12π

44. Hallar la relación entre las áreas de un hexaedro regular y de la superficie esférica circunscrita al hexaedro.

a) $3/\pi$ b) $4/\pi$ c) $5/\pi$
d) $2/\pi$ e) $3/2\,\pi$

45. Hallar el área de la superficie esférica inscrita a un cono de revolución de radio 3u y altura 4u.

a) $8\pi u^2$ b) 9π c) 12π
d) 7π e) 6π

46. Hallar la relación entre las áreas de las superficies determinadas al trazar un plano secante que se encuentra a una distancia igual a la tercera parte del radio de la superficie esférica.

a) 1/3 b) 2/3 c) 3/4
d) 1/2 e) 1/4

47. Dada una superficie esférica de radio 3u circunscrita a un cono de revolución de altura 4u y el plano tangente a la esfera en un punto de la base del cono. Hallar la distancia del vértice del cono al punto en que el eje de éste, encuentra al plano.

a) 15 u b) 13 c) 11
d) 9 e) 12

48. Se tiene un tetraedro regular de arista "*l*". Calcular el radio de la esfera que es tangente a todas las aristas.

a) $\frac{l\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{l\sqrt{2}}{3}$ c) $\frac{l\sqrt{2}}{4}$
d) $\frac{l\sqrt{2}}{5}$ e) $\frac{l\sqrt{2}}{6}$

49. Una superficie esférica es dividida por dos planos en dos casquetes y una zona. Hallar la altura de la zona, si el área de la zona es los 3/5 de la suma de las áreas de los casquetes y el radio de la superficie esférica es 8R.

a) 4R b) 6R c) 3R
d) 5R e) 2R

50. En un cono de revolución, está inscrita una esfera cuya superficie es igual al área de la base del cono. ¿En qué relación se divide el área lateral del cono por la línea de tangencia de ambas figuras?

a) 4/25 b) 4/21 c) 3/22
d) 3/25 e) 3/26

51. Calcular la superficie de una esfera circunscrita a un ortoedro, cuyas dimensiones son $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$ y 2 unidades, respectivamente.

a) $6\pi u^3$ b) $\frac{9}{2}\pi$ c) 12π
d) $\frac{15}{2}\pi$ e) 9π

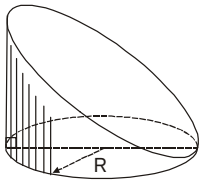
52. Calcular el área de la superficie esférica de una esfera, si la distancia en un punto de la proyección de la circunferencia máxima sobre un plano tangente paralelo al plano de dicha circunferencia máxima, al centro de la esfera es igual a 6 unidades.

a) $72\pi u^2$ b) 75π c) 84π
d) $60\sqrt{2}\pi$ e) $48\sqrt{3}\pi$

53. Calcular el área de una esfera, sabiendo que las áreas de dos círculos menores paralelos distantes 3u y situados a un mismo lado del centro, tienen áreas de πu^2 y $16\pi u^2$.

a) $34\pi u^2$ b) 48 c) 68π
d) 72 e) 48π

54. El área de la esfera inscrita al tronco de cilindro recto es de $16\pi dm^2$. Si la generatriz máxima mide 8 dm, calcular el volumen del tronco.



a) $25\pi dm^3$ b) 28 c) 30
d) 36 e) 48

55. Calcular el área de la superficie esférica, de una esfera inscrita en un tetraedro regular de $18\sqrt{2}\,u^3$ de volumen.

a) $6\sqrt{2}\pi u^2$ b) $2\sqrt{6}\pi$ c) $3\sqrt{3}\pi$
d) $\sqrt{6}\pi$ e) 6π

56. En un cilindro recto, se inscriben dos esferas tangentes exteriores ubicados uno sobre otro. Calcular el volumen del cilindro, si dichas esferas tiene volúmenes iguales a $4\sqrt{3}\pi u^3$.

a) $12\sqrt{3}\pi u^3$ b) $14\sqrt{3}\pi$ c) 18π
d) 24π e) $10\sqrt{6}\pi$

57. Calcular el volumen de una esfera equivalente a un cono equilátero de $4\pi u^2$ de área de base.

a) $16\pi u^3$ b) $\frac{8\sqrt{3}}{3}\pi$ c) 18π
d) $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$ e) 15π

58. Calcular el volumen de la esfera inscrita en un hexaedro regular cuya diagonal mide 12 unidades.

a) $60\pi u^3$ b) $32\sqrt{3}\pi$ c) $30\sqrt{6}\pi$
d) 48π e) $36\sqrt{2}\pi$

59. En una esfera de radio R, está inscrito un cono equilátero. ¿A qué distancia del centro de la esfera se debe trazar un plano paralelo a la base del cono de modo que la diferencia de las áreas que determina el plano en la esfera y el cono sea igual al área de la base del cono?

a) R/5 b) R/4 c) R/3
d) R/2 e) 3R/4

60. Calcular el volumen de la esfera inscrita en un cilindro equilátero de $54\pi u^3$ de volumen.

a) $45\pi u^3$ b) 48π c) 54π
d) 60π e) 36π

Claves

21.	c
22.	c
23.	c
24.	e
25.	c
26.	c
27.	c
28.	c
29.	e
30.	a
31.	d
32.	d
33.	a
34.	c
35.	c
36.	d
37.	e
38.	a
39.	d
40.	d

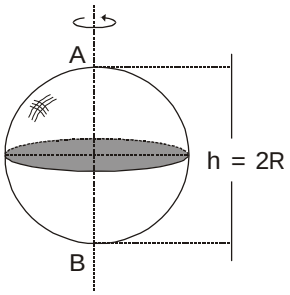
41.	c
42.	d
43.	a
44.	d
45.	b
46.	d
47.	e
48.	c
49.	b
50.	b
51.	e
52.	a
53.	c
54.	d
55.	e
56.	a
57.	b
58.	b
59.	e
60.	e

Capítulo

21 ESFERA II

ESFERA SÓLIDA

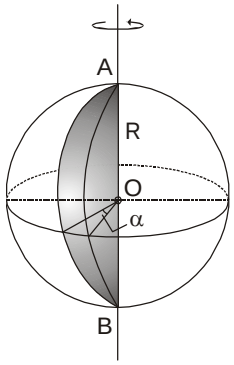
Es el sólido generado por un semicírculo cuando gira una revolución completa alrededor de su diámetro.



$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

CUÑA ESFÉRICA

Es una porción de la esfera sólida limitado por 2 semicírculos que tienen el mismo diámetro.



$$360^o \rightarrow \frac{4}{3}\pi R^3$$

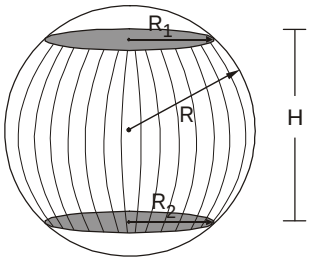
$$\alpha \rightarrow \text{Cuña}$$

$$\text{Cuña} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 . \alpha}{360^o}$$

$$V_{Cuña} = \frac{\pi R^3 \alpha}{270^\circ}$$

SEGMENTO ESFÉRICO

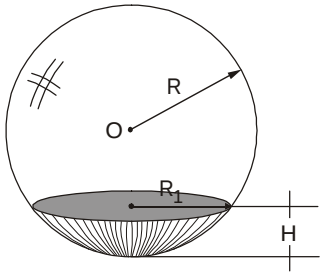
Es el volumen determinado por la zona esférica y dos círculos paralelos en la esfera.



$$V = \frac{\pi H}{2}\left(\frac{H^2}{3} + R_1^2 + R_2^2\right)$$

SEGMENTO ESFÉRICO DE UNA BASE

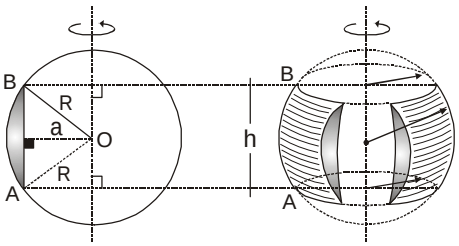
Parte de la esfera limitada por el casquete esférico y su círculo menor correspondiente.



$$V = \frac{\pi H}{2}\left(\frac{H^2}{3} + R_1^2\right)$$

ANILLO ESFÉRICO

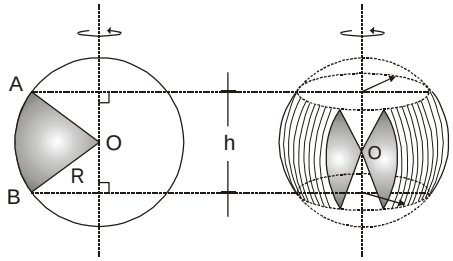
Es el sólido generado por la rotación de un segmento circular cuando gira alrededor de un eje coplanar que pasa por el centro de la circunferencia a que pertenece el segmento circular.



$$\text{Anillo} = \frac{1}{6}\pi\overline{AB}^2.h$$

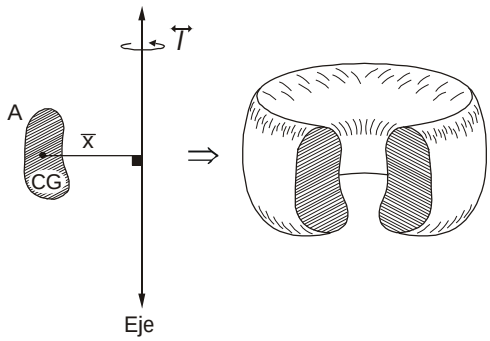
SECTOR ESFÉRICO

Es el sólido generado por un sector circular cuando gira alrededor de un eje coplanar que pasa por su vértice.



$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$$

TEOREMA DE PAPPUS GULDING



A = área de la región plana.
CG = centro de gravedad del área "A".
x = distancia del centro de gravedad del área "A" al eje.
V = 2πxA.

Test de aprendizaje preliminar

01. Hallar el volumen de la esfera circunscrita a un cono de revolución que tiene 6u de radio y 8u de altura.

02. Hallar el volumen de una esfera circunscrita a un cilindro de revolución que tiene $96\pi u^3$ de volumen y además la relación entre el radio de la base y la altura es de 2 a 3.

03. Si el volumen de un cono de revolución equilátero es "V", hallar el volumen de la esfera inscrita.

04. Hallar el volumen de un cono equilátero inscrito en una esfera de volumen $96\pi u^3$.

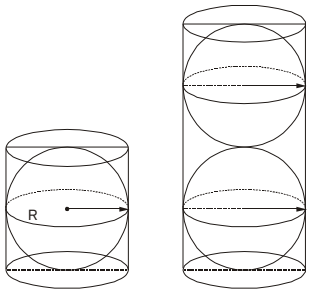
05. Hallar el volumen de la esfera inscrita en un cilindro circular recto de $90\pi m^3$ de volumen.

06. Un triángulo equilátero cuyo lado mide "a" metros, gira alrededor de uno de sus lados. Hallar el volumen del sólido engendrado.

07. Una esfera se encuentra inscrita en un cilindro. Si el área de la esfera más el área total del cilindro es $90\pi u^2$, hallar el volumen de la esfera.

08. El volumen de una cuña esférica de 45º es $\frac{32}{3}\pi u^3$. Calcular el área total de la cuña.

09. En la figura mostrada, calcular la razón de volúmenes de los cilindros de revolución, si el volumen de la esfera de mayor radio es igual a la suma de los volúmenes de las otras dos esferas de menor radio.



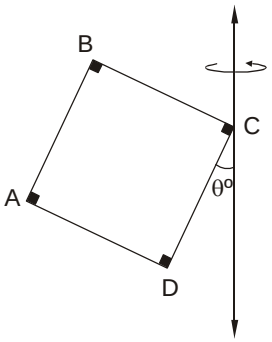
10. Calcular el volumen de una cuña esférica, si el área del huso esférico de 30º es de 108 πu^2.

Practiquemos :

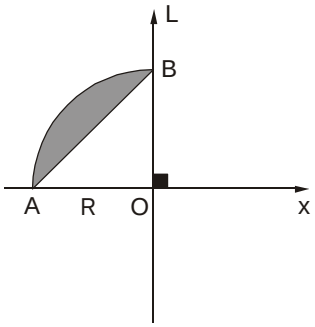
11. Calcular el volumen del sólido formado por un círculo de radio igual a 1u, cuando gire alrededor de una recta tangente a dicho círculo.

12. Determinar la distancia del centro de gravedad de un cuarto de círculo AOB hacia $\overline{OB}$, siendo :
AO = OB = 6π u.

13. Calcular el volumen que genera el cuadrado de lado cuya longitud es $\sqrt{6}$ u al girar 360º alrededor del eje. Dato : θ º = 15º.

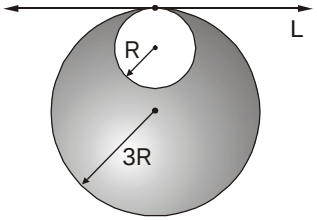


14. Hallar el volumen del sólido generado por el segmento circular, cuando gira 360º alrededor de la recta "L" y R = 2u.

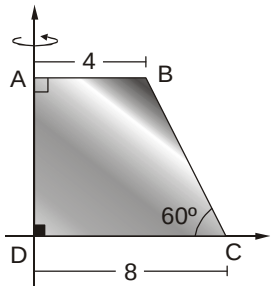


15. Hallar el volumen de una cuña esférica de 30º, si su área total es 12π .

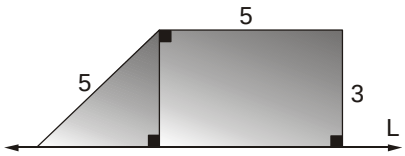
16. Calcular el volumen generado por la región sombreada al girar 360º alrededor de "L".



17. Calcular la relación de volúmenes que hay entre los sólidos generados cuando el trapecio (región) gira 360º alrededor de $\overline{AC}$ y $\overline{CD}$.



18. Al rotar la región sombreada un ángulo de 360º alrededor de la recta "L", se obtiene un sólido cuyo volumen es :



19. Un hexágono regular de lado "a" gira 360º alrededor de uno de sus lados.
El volumen del sólido que se genera es :

20. Hallar el volumen de una esfera inscrita en un octaedro regular cuya arista mide "a".

Problemas propuestos

21. El volumen de un tetraedro regular es $27\,u^3$. Calcular el volumen comprendido entre la esfera inscrita y circunscrita al tetraedro.

a) $24\sqrt{2}\,\pi$ b) $28\sqrt{2}\,\pi$ c) $32\sqrt{2}\,\pi$
d) $\frac{39}{4}\sqrt{2}\,\pi$ e) $39\sqrt{3}\,\pi$

22. Hallar el volumen de una cuña esférica trazada para una esfera de 24 m^3 de volumen y con ángulo que mide 30º.

a) 5 b) 4 c) 3
d) 2 e) 1

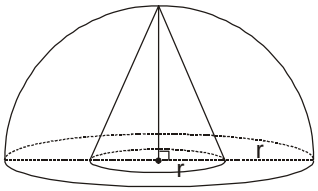
23. Se tiene una cuña esférica de $36\,\pi u^3$ y 45º de ángulo diedro. Hallar el radio de dicha cuña.

a) 4 u b) 9 u c) 6 u
d) 8 u e) 3 u

24. Hallar el volumen de un segmento esférico de una base, si su altura es 1 u y el área de su casquete mide $2\pi u^2$.

a) $\frac{4}{5}\pi u^3$ b) $\frac{2}{3}\pi$ c) $\frac{6}{13}\pi$
d) $\frac{5}{13}\pi$ e) $\frac{2}{13}\pi$

25. En la figura, el volumen del cono es $18\,\pi cm^3$. Calcular el volumen de la semiesfera.



a) $36\,\pi cm^3$ b) $42\,\pi$ c) $72\,\pi$
d) $120\,\pi$ e) $144\,\pi$

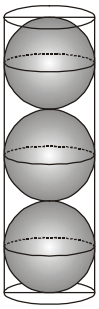
26. Calcular el volumen de una esfera cuya diferencia de áreas entre la superficie esférica y el círculo máximo es $9\,\pi\ u^2$.

a) $18\,\pi\ u^3$ b) $4\sqrt{3}\,\pi$ c) $12\,\pi$
d) $6\sqrt{3}\,\pi$ e) $8\,\pi$

27. En un recipiente cónico (circular recto), lleno de agua se introducen una esfera de radio 3m y otra de diámetro 24 m, quedando exactamente la mitad de ésta fuera del cono. Las esferas son tangentes entre sí y quedan ajustados a la superficie lateral del cono. Calcular el volumen de agua que aún queda en el recipiente.

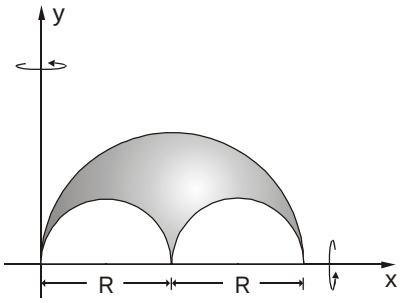
a) 150π b) 330π c) 312π
d) 348π e) 300π

28. En un cesto, se han colocado tres pelotas de igual radio y el volumen de una de ellas es $(\frac{32}{3})\pi$. Hallar el volumen del cesto.



a) 16π b) 22π c) 48π
d) 30π e) 32π

29. Del gráfico, calcular la relación de volúmenes que genera al rotar 360º el área de la región sombreada sobre los ejes "y", "x".

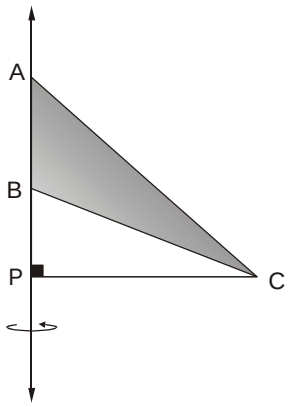


a) $\pi/2$ b) $\pi/3$ c) $\pi/4$
d) $\pi/6$ e) $\pi/8$

30. Cuatro esferas del mismo radio de longitud "r" están en un plano, de manera que están en contacto una con otra. Una quinta esfera del mismo radio se coloca sobre ellas en el centro. Hallar la distancia entre el punto superior de la quinta esfera y el plano.

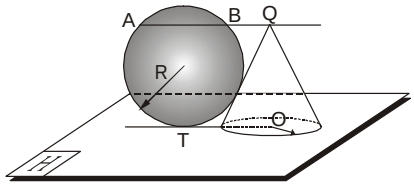
a) $(2+\sqrt{2})r$ b) $(2-\sqrt{2})r$ c) $(1+\sqrt{2})r$
d) $(1-\sqrt{2})r$ e) $\sqrt{2}\,r$

31. En la figura : AB = PC = 6.
El volumen del sólido de revolución que se obtiene al rotar el triángulo ABC alrededor de la recta "L" es :



a) 108π b) 72π c) 60π
d) 27π e) 24π

32. En la figura, $\overline{AB} // \overline{OT}$, $AB = R\sqrt{3}$, el volumen de la esfera es $32\sqrt{3}\pi$. Calcular el volumen del cono equilátero. (T es punto de tangencia).



a) $18\sqrt{3}\pi$ b) $3\sqrt{3}\pi$ c) $9\sqrt{3}\pi$
d) $12\sqrt{3}\pi$ e) $15\sqrt{3}\pi$

33. Se tiene un cono equilátero de altura 4 u, tomando como diámetro dicha altura se construye una esfera. Calcular el volumen del segmento esférico mayor determinado.

a) 8π b) 6π c) 9π
d) 12π e) 15π

34. Los lados de un triángulo miden 13, 14 y 15. Calcular el volumen del sólido generado por dicha región triangular al rotar 360º, sobre el lado intermedio.

a) 564π b) 672π c) 720π
d) 620π e) 648π

35. Hallar el volumen de un segmento esférico de una sola base conociendo que el área de su casquete esférico es cuatro veces el área de la base y además el radio de la esfera es $4\sqrt{3}$ u .

a) $230\pi\sqrt{3}\ u^3$ b) $140\pi\sqrt{3}$
c) $225\pi\sqrt{3}$ d) $216\sqrt{3}$
e) $245\pi\sqrt{3}$

36. Se tiene un cubo, inscrito en una cuña, de tal forma que dos de sus caras consecutivas están contenidas en los semicírculos máximo que limitan la cuña. Calcular la razón de las áreas de la superficie esférica inscrita en dicho cubo y el huso esférico correspondiente a la cuña.

a) 3/2 b) 5/3 c) 9/4
d) 6/5 e) 7/3

37. Calcular el volumen del anillo esférico limitado por la superficie lateral de un cilindro de revolución inscrito en una esfera y por la superficie de la esfera. Sabiendo, además que el cilindro y el anillo esférico son sólidos equivalentes. El área de la superficie esférica es 48 πu^2.

a) $11{,}50\pi\sqrt{3}\,u^3$ b) $13{,}48\pi\sqrt{5}$
c) $11{,}52\pi\sqrt{5}$ d) $13{,}22\pi\sqrt{2}$
e) $12{,}28\pi\sqrt{3}$

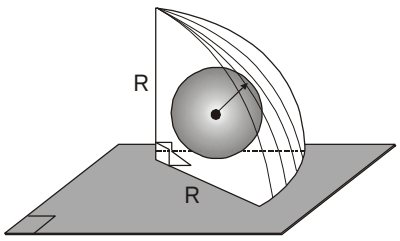
38. Calcular el volumen de una esfera tangente a las aristas de un tetraedro regular de arista 8u.

a) $\frac{76}{3}\pi\sqrt{2}\,u^3$ b) $\frac{49}{3}\pi\sqrt{2}$
c) $\frac{64}{3}\pi\sqrt{2}$ d) $\frac{61}{3}\pi\sqrt{2}$
e) $\frac{56}{3}\pi\sqrt{2}$

39. En un plano, se encuentran tres esferas iguales de radio R; cada una de las cuales hace contacto con otra de ellas. Una cuarta esfera hace contacto con cada una de las tres esferas dadas y con el plano. Hallar el radio de la cuarta esfera.

a) $\frac{R}{2}$ b) $\frac{R}{3}$ c) $\frac{R}{4}$
d) $\frac{2R}{5}$ e) $\frac{R}{6}$

40. Hallar el volumen de la esfera inscrita en un octavo de esfera, cuyo radio mide $2(\sqrt{3}+1)u$.



a) 16π b) 32π c) $\frac{16}{3}\pi$
d) $\frac{32}{3}\pi$ e) $\frac{64}{3}\pi$

41. Hallar la longitud de lugar geométrico de los baricentros de las secciones de una esfera por planos que pasan por una recta "L", la cual es tangente a la esfera de radio "R".

a) πR b) $2\pi R$ c) $\pi\frac{R}{2}$
d) $3\pi\frac{R}{2}$ e) $3\pi R$

42. Hallar la razón del volumen de una esfera al volumen del cono recto circunscrito a esta esfera, si la superficie total del cono es "n" veces la superficie de la esfera.

a) $\frac{1}{n}$ b) $\frac{2}{n}$ c) $\frac{3}{4}n$
d) $\frac{4}{3}n$ e) $\frac{6}{5}n$

43. Se tiene un tetraedro ABCD, en donde el volumen es 100 u^3; el área total es $130\,u^2$ y el área de la cara ABC es 15 u^2. Hallar el volumen de la esfera ex-inscrita relativa a la cara ABC.

a) $32\pi u^3$ b) 25π c) $\frac{28}{3}\pi$
d) 36π e) 64π

44. Un semicírculo de diámetro 12u gira 120º alrededor del diámetro. Hallar el volumen de la cuña esférica.

a) $84\pi u^3$ b) 96π c) 104π
d) 78π e) 80π

45. La altura y diámetro de un cono de revolución son iguales al radio de una esfera de $4u^3$ de volumen. Calcular el volumen del cono.

a) $\frac{1}{3}u^3$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{2}{5}$
d) $\frac{1}{5}$ e) $\frac{2}{3}$

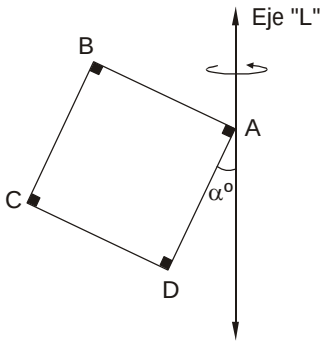
46. Se tiene una región hexagonal regular de perímetro igual a 24. Calcular el máximo volumen generado al girar dicha región sobre una recta coplanar que contiene uno de sus vértices.

a) $120\sqrt{3}\pi$ b) $172\sqrt{3}\pi$ c) $192\sqrt{3}\pi$
d) $148\sqrt{3}\pi$ e) $162\sqrt{3}\pi$

47. Calcular el volumen de la semiesfera inscrita en un tronco de cilindro recto, de modo que la base circular del tronco de cilindro coincide con el círculo máximo de la semiesfera. Además, se sabe que la generatriz menor y el volumen de dicho tronco es 4 unidades y $120\pi u^3$, respectivamente.

a) $32\sqrt{6}\pi u^3$ b) 64π c) $24\sqrt{3}\pi$
d) 72π e) $36\sqrt{3}\pi$

48. Determinar la medida del ángulo "α" de modo que el volumen generado al rotar la región cuadrada en torno del "L", sea el mayor posible.



a) 15º b) 30º c) 45º
d) 60º e) 90º

49. Una esfera de radio igual 1,5 u tiene el mismo volumen que un cono circular recto, cuyo radio de la base es 0,75u. Hallar la altura del cono.

a) 24 u b) 18 c) 15
d) 10 e) 12

50. Hallar la relación de los volúmenes entre las esferas inscrita y circunscrita en un mismo hexaedro regular.

a) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ b) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{9}$
d) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ e) $\frac{\sqrt{6}}{9}$

51. Hallar la longitud del radio de la semiesfera inscrita en el tetraedro regular cuya arista mide 1 m.

a) $\frac{\sqrt{3}}{9}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ c) $\frac{\sqrt{6}}{9}$
d) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

52. Una esfera de área $144\,u^2$ es cortada por 2 planos que forman entre sí un ángulo diedro de 60º, de modo que la recta de intersección de los planos es tangente a la esfera y el plano bisectriz contiene un diámetro de la esfera. Hallar el volumen de la parte de la esfera comprendida en el ángulo diedro.

a) $288\pi\,u^3$ b) 198π c) 243π
d) 126π e) 264π

53. En una circunferencia de diámetro igual a $4\sqrt{3}$ dm, se traza la cuerda $\overline{BC}$ de modo que : mBC = 120º. Calcular el volumen del anillo esférico que se obtiene al girar 360º, el segmento circular BC, alrededor de un eje diametral paralelo a $\overline{BC}$.

a) $36\pi\,dm^3$ b) 27π c) 12π
d) 32π e) 72π

54. Calcular el volumen de la esfera tangente a las aristas PA, PB y PC de un tetraedro regular P-ABC, en los vértices A, B y C, respectivamente, siendo : $3\sqrt{3}\,u^2$ el área total del tetraedro.

a) $\sqrt{6}\,\pi\,u^3$ b) $2\sqrt{3}\,\pi$ c) 6π
d) 9π e) $3\sqrt{2}\,\pi$

55. Una alambre se enrolla de modo que forma una esfera, si la sección del alambre es de $\pi\,mm^2$ y el radio de la esfera formado es de 10 cm. Hallar la longitud del alambre, si el porcentaje de vacíos de la esfera es del 10%.

a) 1,2 km b) 3 c) 1
d) 1,6 e) 2,4

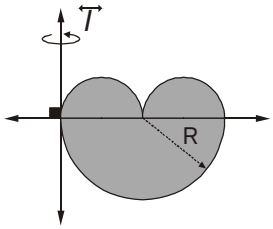
56. Se tiene una pirámide hexagonal regular por el centro de la base de dicha pirámide, se ha trazado un plano paralelo a una cara lateral. Hallar la relación entre el área de la sección determinada y el área lateral de la pirámide.

a) $\frac{5}{4}$ b) $\frac{5}{6}$ c) $\frac{10}{7}$
d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{5}{24}$

57. Se funde una bola de plomo de radio 5 cm, para obtener bolas cuyo radio sean de 1 cm cada una. ¿Cuántas bolas de plomo se obtendrán en el proceso?

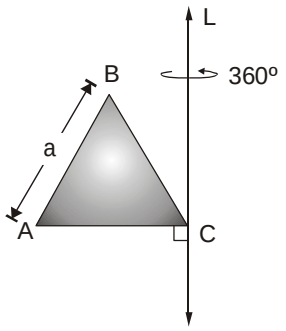
a) 50 b) 100 c) 150
d) 175 e) 125

58. Hallar el volumen generado, al rotar la siguiente superficie alrededor del eje $\overleftrightarrow{T}$.



a) $\frac{\pi^2R^3}{2}$ b) $\frac{3}{2}\pi^2R^3$ c) $\frac{3}{5}\pi R^3$
d) $\frac{4}{7}\pi R^3$ e) $\frac{2}{3}\pi R^3$

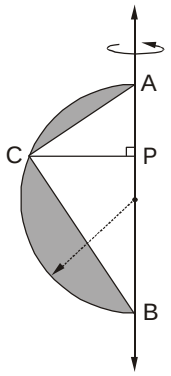
59. Hallar el volumen del sólido generado al girar el triángulo equilátero ABC, alrededor de L.



a) $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{4}$ c) $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$

d) $\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{3}$ e) $\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{2}$

60. Según el gráfico, siendo :
AB = 5 y $(AP)^2 + (PB)^2 = 12$. Calcular el volumen del sólido generado por la región sombreada al girar 360º en torno a la recta AB.



a) 5π b) 12π c) 10π

d) 9π e) 25π

Claves

21.	e
22.	d
23.	c
24.	b
25.	e
26.	b
27.	c
28.	c
29.	e
30.	a
31.	b
32.	c
33.	c
34.	b
35.	d
36.	c
37.	c
38.	c
39.	b
40.	d

41.	a
42.	a
43.	b
44.	b
45.	b
46.	c
47.	a
48.	c
49.	a
50.	c
51.	c
52.	b
53.	a
54.	a
55.	a
56.	a
57.	e
58.	b
59.	b
60.	c

ÍNDICE

Capítulo 1
Ángulos 9

Capítulo 2
Triángulos 21

Capítulo 3
Congruencia de Triángulos 33

Capítulo 4
Polígonos 45

Capítulo 5
Cuadriláteros 55

Capítulo 6
Circunferencia 67

Capítulo 7
Angulos en la Circunferencia 79

Capítulo 8
Puntos Notables 91

Capítulo 9
Proporcionalidad y Semejanza 105

Capítulo 10
Relaciones Métricas en un Triángulo Rectángulo 117

Capítulo 11
Relaciones Métricas en Cualquier Triángulo 127

Capítulo 12
Relaciones Métricas en la Circunferencia 137

Capítulo 13
Polígonos Regulares 149

Capítulo 14
Áreas de las Regiones Poligonales y Relaciones de Áreas 159

Capítulo 15
Áreas de Regiones Curvas 179

Capítulo 16
Geometría del Espacio Perpendicular - Diedro - Triedro 191

Capítulo 17
Poliedros - Poliedros Regulares *203*

Capítulo 18
Prisma - Cilindro - Tronco *213*

Capítulo 19
Pirámide - Cono - Troncos *225*

Capítulo 20
Esfera I *235*

Capítulo 21
Esfera II *243*